ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН ПО МАТЕМАТИКЕ

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП 2023-2024 УЧЕБНОГО ГОДА

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров, К.В.Трунов

Рецензент Р.Н.Гарифуллин

УФА - 2023

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

4. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.
5. Во время проверки работ 30.11.23 и 01.12.23 будет работать телеграмм-группа Муниципальные жюри математика 2023, ссылка

https://t.me/+kUieh-C3YJQ2MDZi

5 класс

1. Представьте себе старый замок. В парадной столовой стоит огромный квадратный стол. Да и подносы в замке тоже очень большие, и поэтому на столе их умещалось только восемь, причем по три вдоль каждой стороны. Однажды на пиру на подносы положили зажаренных целиком поросят, да при этом ни на каких двух подносах поросят не было поровну. Могло ли при этом оказаться так, что количество поросят на трех подносах вдоль каждой стороны стола было одинаковым? (Если да – приводите пример, если нет – доказывайте!)

   Решение. Такое возможно. Пример с количествами поросят на восьми подносах:

1	8	4
7		3
5	2	6

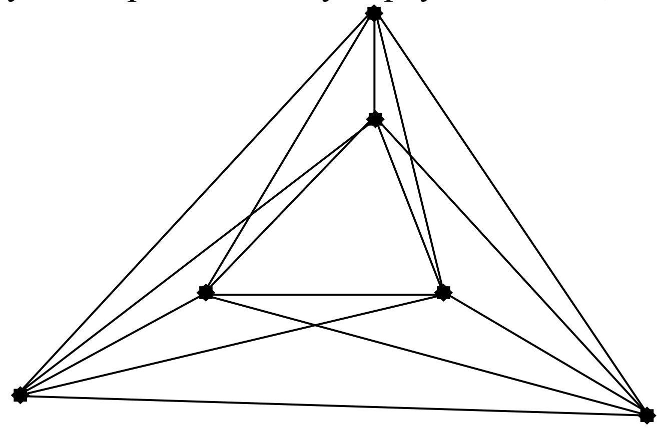
   Разумеется, он не единственный.

   Критерии. Любой верный пример – 7 баллов. Доказательство, что невозможно, либо неверный пример, либо утверждение о том, что возможно, но без примера – 0 баллов.

2. Один король увлекся постройкой дорог, а советники ему подсказали, что перекрестки опасны, и хорошо бы уменьшить их количество. В одной части королевства были шесть крепостей, и король повелел соединить каждые две из них прямой дорогой, не заходящей в другие крепости. Смогут ли строители при каком-нибудь расположении крепостей обойтись только тремя перекрестками? (Если да – приводите пример, если нет – доказывайте!)

   Решение. Такое расположение существует, пример изображен на рисунке.

   (Крепости служат вершинами двух треугольников, один внутри другого).



Критерии. Любой верный пример – 7 баллов. Доказательство, что невозможно, либо неверный пример, либо утверждение о том, что возможно, но без примера – 0 баллов.

3. В доме 168 квартир, и, обходя их подряд, участковый полицейский обнаружил, что в каждой третьей живет собака, а в каждой седьмой – канарейка. В скольких квартирах нет ни собаки, ни канарейки?

   Решение. Собака живет в 168:3=56 квартирах, канарейка в 168:7=24 квартирах, но есть квартиры, в которых живут и собака, и канарейка: те, которые одновременно являются и каждой седьмой, и каждой третьей, то есть это каждая 21-я. Их 168:21=8. Таким образом, кто-нибудь живет в 56+24-8=72 квартирах (поскольку квартиры, в которых есть и собака, и канарейка, были подсчитаны дважды). Остается 168-72=96 квартир, в которых нет ни собаки, ни канарейки.

   Ответ. 96.

   Критерии. Получен результат 88, который не учитывает двойной подсчет квартир с собакой и канарейкой – 2 балла. Ход решения верный, но допущены арифметические ошибки – 5 баллов. Найдено не количество квартир без обитателей, а наоборот, верно найдено количество квартир, где кто-то есть, - то есть 72 – 4 балла.

4. В школьном буфете продаются плюшки и ватрушки. Соня взяла 3 плюшки и 2 ватрушки, заплатив 99 рублей, а Рита взяла 4 плюшки и 5 ватрушек, заплатив 188 рублей. Илюша, узнав это, сказал, что берется определить, сколько стоит одна плюшка и сколько стоит одна ватрушка. А вы сможете?

   Решение. Сложив покупки Сони и Риты, получим, что за 7 плюшек и 7 ватрушек заплачено 99+188=287 рублей. Тогда одна плюшка и одна ватрушка вместе стоят 287:7=41 рубль. Две плюшки и две ватрушки вместе – 82 рубля. Значит, 1 плюшка стоит 99-82=17 рублей, а одна ватрушка 41-17=24 рубля.

   Ответ. Плюшка – 17 рублей, ватрушка – 24 рубля.

   Критерии. Верно найдено, сколько стоят вместе ОДНА плюшка и ОДНА ватрушка – 3 балла. Решение доведено до конца, но содержит арифметические ошибки – 5 баллов. Приведен верный ответ, возможно, угаданный, и показано, что условия выполнены (сделана подстановка) – 1 балл. Просто приведен верный ответ – 0 баллов. Возможно введение участниками переменных и работа с ними, это не меняет оценку при соблюдении логики решения.

5. Зина на каникулах заскучала, и решила развлечь себя сложением чисел. Она сложила много-много подряд идущих натуральных чисел, начиная с 1, и радостно записала ответ. Но ее старшая сестра Нина, увидав только последнюю цифру, сказала, что такого быть не может. Какая же это могла быть цифра? (Требуется привести все возможные варианты).

   Решение. Запишем начальные суммы: 1; 1+2=3; 1+2+3=6; 1+2+3+4=10; 1+2+3+4+5=15; 1+2+3+4+5+6=21; 1+2+3+4+5+6+7=28; 1+2+3+4+5+6+7+8=36; 1+2+3+4+5+6+7+8+9=45; 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10=55

   Мы видим, что последней цифрой оказывалась 1, 3, 6, 0, 5, 8, и полный десяток дает в сумме последнюю цифру 5 (как бы велики ни были взятые далее числа, на последнюю цифру это влиять не сможет). Но полученные цифры образуют пары отличных на 5: 1 и 6, 3 и 8, 0 и 5, и при добавлении полного десятка они будут переходить друг в друга. Значит, как бы много чисел ни было сложено, получить какие-либо другие цифры в качестве последней невозможно. Тогда получается, что последней цифрой не может быть 2, 4, 7 и 9. Одну из них и увидела Нина.

   Ответ. 2, 4, 7, 9.

   Критерии. Допущена одна арифметическая ошибка, в результате чего появились неверные пары – 6 баллов. Не рассказано о разбиении на пары отличающихся на 5 и о том, что сумма каждого полного десятка образует последнюю цифру 5, но рассмотрено полностью 20 чисел, сумма которых оканчивается на 0, и выводы сделаны из этого – баллы не снижать. То же, но полностью 20 чисел не рассмотрено – 4 балла. Дан верный ответ, обоснование недостаточное (нет рассмотрения полного десятка и выводов из этого) – 2 балла. Рассмотрено только частично и полный ответ не получен – 0 баллов.

6 класс

1. Одуванчик полевой открывается с появлением первых лучей солнца и цветёт жёлтым цветом 2 дня. Утром третьего дня он белеет, а к концу этого дня облетает. Вчера на лугу было 18 жёлтых цветов и 15 белых; сегодня 19 жёлтых и 7 белых.

а) Сколько жёлтых цветов было позавчера?

б) Сколько белых цветов будет завтра?

Ответ. а) 22 желтых цветка; б) 11 белых цветов.

Решение. а) Цветок, раскрывающийся в день 1, становится белым в день 3. Поэтому 3 дня назад раскрылись 15 цветов, а 2 дня назад раскрылись 7 цветов. Значит, позавчера было 15+7=22 цветка.

б) Цветок, который станет белым завтра, вчера был жёлтым. Из 18 цветов, которые были жёлтыми вчера, 7 стали белыми сегодня. Тогда оставшиеся 18-7=11 цветов станут белыми завтра.

Критерии. За пункт а ставить 3 балла, за пункт б ставить 4 балла. Решение возможно и с помощью уравнений.

2. Каждое натуральное число от 1 до 30 покрашено в один из двух цветов: красный или белый. Докажите, что какие-то два одноцветных числа отличаются либо на 6, либо на 8.

Доказательство. Предположим, что это не так. Пусть для определенности 1 красное число, тогда число 7, отличающееся от него на 6, белое, 13 – красное, 19 – белое и 25 – красное. С другой стороны, число 9, отличающееся от 1 на 8 белое, 17 красное и 25 – белое. Противоречие.

Критерии. Любое верное доказательство – 7 баллов. В 0 баллов оцениваются рассуждения, явно или скрыто опирающиеся на предположение об истинности доказываемого утверждения.

3. Амиру для индивидуального проекта нужно вырезать несколько одинаковых кусочков проволоки (длина каждого куска – целое число сантиметров). Вначале Амир взял кусок проволоки длины 10 метров и смог от него отрезать только 9 нужных кусочков. Затем Амир взял кусок длины 11 метров, но и его

хватило тоже лишь на 9 кусков. Найдите длину кусочков, которые нужно было вырезать Амиру. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответ: 111 см.

Решение. Вначале заметим, что 9 кусков по 111 см составляют 999 см и поэтому и первого, и второго куска на 9 частей хватит, а второго куска на 10 частей уже не хватит: $10 \times 111 = 1110 > 1100$. Докажем, что если длина куска не равна 111 см, то одно из условий задачи не будет выполнено. Если длина куска не больше 110 см, то из куска длины 11 м можно было бы вырезать как минимум 10 частей, что противоречит условию. Если же длина куска не менее 112 см, то на 9 частей понадобится хотя бы 1008 см, то есть из десятиметрового куска их нельзя будет вырезать.

Критерии. Приведен правильный ответ – 1 балл. Доказательство, что куски длиной меньше 111 см не подходят – 3 балла. Доказательство, что куски длиной больше 111 см не подходят – 3 балла. Баллы суммируются.

4. Софья и Камиль расставляют числа от 1 до 9 (каждое по одному разу) в таблицу 3×3. Сначала Софья ставит шесть чисел, затем Камиль – оставшиеся три. Софья хочет, чтобы набор трёх произведений чисел по строкам оказался таким же, как и набор трёх произведений чисел по столбцам, как бы Камиль ни расставлял свои числа. Помогите Софье это сделать.

Решение. Пусть Софья поставит числа так, как показано на рисунке справа. Тогда, куда бы Камиль ни поставил три оставшихся числа, наборы произведений и по горизонтали, и по вертикали будут $8x$, $24y$, $6z$.

1	8	
6		4
	3	2

Критерии. Любое верное решение – 7 баллов.

5. Для награждения победителей и призеров финала чемпионата мира по флайкастингу арбитру передали одну золотую, три серебряные и пять бронзовых медалей. Но он получил срочное сообщение, что одна из медалей

фальшивая (легче настоящей). Настоящие медали из одинакового металла весят поровну. Медали из различных металлов весят по-разному, но мы не знаем, какие легче, а какие тяжелее. Как арбитру найти фальшивую медаль с помощью двух взвешиваний на двухчашечных весах без гирь?

Решение. Обозначим медали З1, С1, С2, С3, Б1, Б2, Б3, Б4, Б5. Создадим наборы, распределив равное количество медалей одного достоинства по разным наборам: С1+Б1+Б2 и С2+Б3+Б4.
Сравним вес этих наборов:
Если один из наборов легче (например, левый), то в нём есть фальшивая медаль. В этом случае взвесим Б1 и Б2. Если одна из медалей легче, то она и будет фальшивой. Иначе вес левого набора меньше за счёт фальшивой медали С1.
Если оба набора весят поровну, то фальшивая медаль находится в множестве З1, С3, Б5. Нельзя сравнивать между собой различные медали, поэтому добавим к ним две медали Б1 и С1 (уже точно известно, что они настоящие) и создадим наборы С3+Б1 и Б5+С1. Если левый набор легче, то фальшивой является С3. Если правый набор легче, то фальшивой является Б5. Если вес наборов одинаков, то фальшивая медаль - З1.

Критерии.
Описание взвешиваний, не приводящее в определению фальшивой монеты хотя бы в одном случае – 0 баллов. Стратегия верная, но доказана не полностью – 4 балла. Любое верное решение – 7 баллов.