

11 класс

1. У математика есть банковская карта с четырехзначным пин-кодом, состоящим из ненулевых цифр. Известно, что если пин-код карты умножить на 6 и поделить на 5, то получится число из тех же цифр, но в обратном порядке. Найдите все возможные значения такого пин-кода.
2. Приведите пример такого многочлена третьей степени с целыми коэффициентами, для которого иррациональное число $a = \sqrt[3]{2023 - \sqrt{2022 \cdot 2024}} + \sqrt[3]{2023 + \sqrt{2022 \cdot 2024}}$ является корнем.
3. Пусть квадратные трёхчлены $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют неравенству $g'(x)h'(x) \geq |g(x)| + |h(x)|$ при всех действительных x . Найдите наименьшее значение функции $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ на всей числовой оси.
4. В гостинице из 2023 одноместных комнат действуют правила: 1) каждый номер сдаётся ровно на сутки; 2) внутри каждой комнаты висит табличка с номером другой комнаты, в которую можно переехать из текущей. В понедельник в 12.00 в гостиницу заселились 2023 жителя и, соблюдая правила проживания, провели там m дней ($m > 1$). Оказалось, что последние сутки пребывания в отеле они провели в тех же номерах, в которые заселились изначально; при этом каждый гость успел пожить в $m-1$ разных комнатах. За какое наименьшее количество дней это могло произойти?
5. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC , пересекает его стороны BC и AC во внутренних точках Q и P соответственно, причем $AP = 3PC$. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$, где BM – медиана треугольника ABC .
6. Дана сфера единичного радиуса и точка S на ней. Рассматриваются всевозможные тетраэдры с вершиной S , имеющие попарно перпендикулярные ребра, исходящие из этой вершины. Докажите, что плоскости оснований всех таких пирамид имеют непустое пересечение. Найдите множество, являющееся этим пересечением.