ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2023-2024 УЧЕБНЫЙ ГОД

РЕСПУБЛИКА БАШКОРТОСТАН

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров, К.В.Трунов

Рецензент Р.Н.Гарифуллин

УФА - 2023

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

4. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.
5. Во время проверки работ 30.11.23 и 01.12.23 будет работать телеграмм-группа Муниципальные жюри математика 2023, ссылка

https://t.me/+kUieh-C3YJQ2MDZi

7 класс

1. Найдите две последние цифры числа $(1!+2!+3!+\ldots+100!)^2$. Здесь $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$, например, $6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=720$.

Решение. Так как для n>9 имеем, что n! делится на 100 (в этом легко убедиться, вычислив первые 10 таких величин), получаем, что число $1!+2!+3!+\ldots100!$ имеет вид

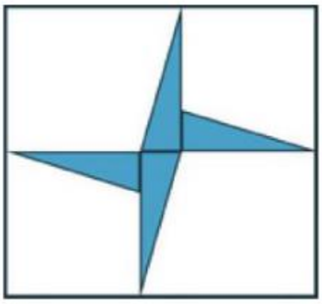
100k+1+2+6+24+20+20+40+20+80=100(k+2)+13=100m+13.

Тогда $(1!+2!+3!+\ldots100!)^2 = (100m+13)(100m+13) =$
$= 10000m^2 + 26\cdot100m + 169$.

Ответ: 69.

Критерии. Только ответ - 1 балл. Замечено и доказано, что число $1!+2!+3!+\ldots100!$ оканчивается на 13 - 3 балла. Рассуждения о последних цифрах квадрата этой величины могут вестись без применения переменной.

2. Стороны прямоугольника равны 28 см и 30 см. Внутри него расположены 4 одинаковых прямоугольных треугольника, образующие закрашенную фигуру. Найдите площадь закрашенной фигуры.



Решение. Пусть стороны закрашенного треугольника, образующие прямой угол, равны x и y, x>y. Тогда 30=2x+y, 28=2x. Откуда x=14, y=2. Искомая площадь равна 2·14·2=56.

Ответ: 56.

Критерии. Замечено, что одна из сторон треугольника равна 14 - 1 балл. Верно найдены обе стороны треугольника, но площадь не подсчитана – 4 балла. При подсчете площади потерян множитель 2 или ½ , все остальное верно – 5 баллов.

3. Пусть для натуральных чисел x и y операция $x\&y$ означает остаток от деления x на y. Например, 17&6=5, 6&17=6. Найдите все натуральные решения уравнения $x\&7 + 7\&x = 12$, удовлетворяющие неравенству $2016 < x < 2044$.

Решение. Так как число x>7, то 7&x=7. Тогда x&7+7 =12, x&7=5, откуда x=7k+5. Числа такого вида в заданном промежутке: 2023, 2030, 2037.

Вид числа x может не показываться алгебраической формулой, а записыватся словами «имеет остаток 5 при делении на 7».

Ответ: 2023, 2030, 2037.

Критерии. Только ответ - 1 балл. Частичный ответ - 0 баллов. Замечание, что 7&x=7 - 1 балл (суммируется с предыдущим). Дополнительно сказано о виде числа x – плюс 1 балл.

4. Сравните числа A и B, где

$$A = \left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{2023}\right),\quad B = \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\ldots\frac{2023}{2022}\right).$$

Решение. Рассмотрим число $A = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\ldots\cdot\frac{2023}{2022}\cdot\frac{2024}{2023} = 1012$.

Рассмотрим число B. Заметим, что в скобках записано 2022 слагаемых, каждое из которых больше единицы. Тогда их сумма больше 2022. Покажем, что сумма в скобках больше 2024. Действительно,

$$\frac{3}{2} = 1+\frac{1}{2}, \frac{4}{3} = 1+\frac{1}{3}, \frac{5}{4} = 1+\frac{1}{4}, \frac{6}{5} = 1+\frac{1}{5}, \frac{7}{6} = 1+\frac{1}{6},$$

$$\frac{8}{7} = 1+\frac{1}{7}, \frac{9}{8} = 1+\frac{1}{8}, \frac{10}{9} = 1+\frac{1}{8}, \frac{11}{10} = 1+\frac{1}{10}, \frac{12}{11} = 1+\frac{1}{11},$$

$$1+\frac{3}{2}+\frac{4}{3}+\frac{5}{4}+\frac{6}{5}+\frac{7}{6}+\frac{8}{7}+\frac{9}{8}+\frac{10}{9}+\frac{11}{10}+\frac{12}{11} =$$

$$= 12+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}\right) = = 13+0.25+$$
$$0.2+0.125++0.1\ +\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11} = 13.675+\frac{239}{693}$$>14, откуда $B >$ $\frac{1}{2}$·2024=1012.

Критерии. Преобразовано число A - 1 балл. Получена оценка B > 1011 - 1 балл (суммируются).

5. На доске написано число 2. Петя и Ваня играют в игру. За один ход следует прибавить к числу на доске другое натуральное число, меньшее написанного, стереть старое число и написать вместо него новое. Выигрывает тот, кто первым получит число 2023. Кто победит при правильной игре, если первым ходит Петя?

Решение. Пусть после хода Пети на доске написано число N. Тогда Ваня может получить одно из чисел {N+1,...2N-1}. Тогда Петя всегда может добиться числа 2N или 2N+1 на доске. Это означает, что после первого хода Петя напишет 3, далее 7, 15, 31, 63, 126, 252, 505, 1011, 2023.

Ответ: Победит Петя.

Критерии. Приведена выигрышная стратегия, но не обоснована - 2 балла.

6. Из одной точки круговой трассы длиной 2024 метра в противоположных направлениях с постоянными скоростями стартуют заяц и черепаха. Первый раз они встречаются через 10 минут на расстоянии 79 метров от старта. Найдите, через какое время они впервые встретятся на расстоянии 60 метров от старта.

Решение. Пусть m- число встреч зайца и черепахи, откуда $79m+60=2024k$ либо $79m-60=2024n$, где m, n,k- целые числа. Заметим, что если разделить 2024 на 79, то целая часть частного равна 25. Возьмем $m=26$, тогда $79\cdot26-2024=30$. Значит, через 520 минут расстояние от старта будет равно 60 м. В случае второго соотношения, если $n=1$ или 2, целых решений нет, а значит оно не даст лучшее время.

Ответ: **520** минут.

Критерии. Только ответ - 1 балл. Рассмотрена только одна из двух ситуаций - 3 балла.

8 класс

1. Кирилл Рыбкин не понял тему «Проценты». Он находит, сколько процентов составляет x от y по формуле $\frac{|x-y|}{y} \cdot 100\%$. С помощью своей формулы Кирилл вычислил, что количество девочек в его классе составляет от количества мальчиков 100%. Сколько процентов, по мнению Кирилла, составляет в его классе количество девочек от количества всех детей класса?

Решение. Пусть количество мальчиков m, а количество девочек d. Тогда $\frac{|d-m|}{m} \cdot 100 = 100$. Откуда $d = 0$ или $d = 2m$. В первом случае Кирилл получит $\frac{|d-(d+m)|}{d+m} \cdot 100\% = 100\%$. Во втором случае $\frac{|d-(d+m)|}{d+m} \cdot 100\% = \frac{m}{3m} \cdot 100\% = 33\frac{1}{3}\%$

Ответ. 100% или $33\frac{1}{3}\%$.

Критерии проверки. Верно рассмотрен только один из случаев $d = 0$ или $d = 2m$ - 2 балла;
Решение в целом верное, но допущена одна арифметическая ошибка – 6 баллов;
Перепутано количество мальчиков и количество девочек – 0 баллов;
Только верный ответ – 1 балл.

2. На доске записаны три различных нечетных натуральных числа. Разность между наибольшим и наименьшим из этих чисел не превышает пяти. Аделя перемножила эти три числа и сообщила результат Анне. Анна посчитала сумму цифр в полученном числе и у неё получилось 2023. Докажите, что хотя бы одна из девочек, Анна или Аделя, допустила ошибку.

Решение. Поскольку разность между наибольшим и наименьшим числами не больше 5, то написаны три последовательных нечётных числа. Одно из трёх последовательных нечётных чисел кратно трём, потому что у них разные остатки при делении на 3. Значит, и произведение кратно трём, т.е. сумма цифр полученного произведения должна быть кратна трём. Но 2023 не кратно трём. Таким образом, или Аделя, или Анна ошиблись.

Критерии проверки. Замечено, что речь идет о трех последовательных нечетных числах – 1 балл. Далее доказано, что произведение кратно 3 – 4 балла (не суммируются).

3. В прямоугольном треугольнике IRN с прямым углом R провели биссектрису IA. Оказалось, что IA=AN. Найти IN, если IR=3.

   Решение. Пусть AK – высота треугольника IAN, она же и медиана, т.к. треугольник IAN – равнобедренный. Треугольники IRA и IKA равны по гипотенузе и острому углу. Тогда IR=IK=KN, т.е. IN=6.

   Критерии проверки. Замечено, что треугольники IRA и IKA равны, дальнейшего продвижения нет – 2 балла. Замечено, что угол RIN в два раза больше угла RNI, дальнейшего продвижения нет – 2 балла.

4. Воспитательница Людмила выстраивает в ряд двух мальчиков, трёх девочек и кошечку. Кошечку нельзя ставить рядом с мальчиком, а рядом с каждым мальчиком должна находиться хотя бы одна девочка. Сколькими способами воспитательница Людмила может построить всех (детей и кошечку) в ряд?

   Решение. Посмотрим, как могут располагаться мальчики, девочки и кошечка. Если кошечку поставили крайней слева, то за ней может стоять только девочка. Далее возможно: ДММД, ДМДМ, МДМД, МДДМ, ММДД – 5 вариантов. Столько же вариантов, если кошечка будет крайней справа (симметричные варианты), ещё 5 вариантов.

   Если кошечка не с краю, то её окружают девочки ДКД. Пусть все остальные находятся слева от этой группы, тогда они могут располагаться: ДММ или МДМ – 2 варианта. Ещё 2 варианта, когда все остальные справа от группы ДКД. Если два ребёнка слева от этой группы, а один справа, то справа могут быть ДМ или МД - 2 варианта. Столько же вариантов, если один ребёнок слева от этой группы, а двое справа. Итого, 18 вариантов распределения детей по полу и кошечки.

   В каждом из вариантов можем распределить мальчиков двумя способами, а девочек 3!=6 способами.

   Итак, всего способов $18 \cdot 2 \cdot 6 = 216$.

   Ответ. 216.

   Критерии проверки. Только верный ответ – 1 балл. Верно подсчитаны возможные распределения в ряд кошечки и детей по полу, дальнейшего нет – 3 балла. Подсчитаны возможные распределения в ряд кошечки и детей по полу, при этом пропущен 1 случай или два симметричных, дальнейшего продвижения нет – 2 балла. Неверный ответ из-за пропуска одного или двух симметричных случаев распределения кошечки и детей по полу – 5 баллов. Дан ответ в виде числового выражения, не досчитанный до числа в десятичной записи – баллы не снимать.

5. Имеется пачка, состоящая из 2023 карточек, на которых по порядку написаны все числа от 1 до 2023. Также имеется кучка из 2023 камней и огромный пустой бак. Миша и Андрей играют в следующую игру: каждый игрок при своём ходе выбирает любую карточку из пачки, затем он может либо добавить в бак из кучки количество камней, равное числу на выбранной карточке, либо извлечь из бака в кучку это же количество камней. После каждого хода выбранная карточка уничтожается, и ход переходит к другому игроку. Игрок, который не может сделать ход, считается проигравшим. Миша начинает первым. Необходимо определить, кто из них может гарантировать свою победу, независимо от ходов другого игрока.

   Ответ. Выиграет Миша.

   Решение. Миша возьмёт карточку 2023, положив в бак при этом 2023 камня. Остальные карточки мысленно разобъёт на пары (n; 2023 – n), т.е. (1; 2022), (2; 2021) и т.д. Тогда на любой ход Андрея Миша берёт карточку из той же пары и добавляет камни, если Андрей их добавил и убирает, если Андрей их убирал. Заметим, что при такой стратегии после хода Миши в баке станет 0 или 2023 камня и после хода Андрея и Миши всегда есть ход т.к. сумма чисел в каждой паре 2023. Поскольку количество карточек уменьшается, то игра закончится после хода Миши.

   Критерии проверки. Приведён первый ход и верная стратегия – 3 балла. Если при этом обосновано, что данная стратегия работает (т.е. у Миши всегда есть ход) – +3 балла. Если при этом доказано, что тогда Миша выигрывает (карточки когда то закончатся) – +1 балл. Последний пункт может быть доказан неявно, например, написано: «и т.д. до последней карточки».

6. В выпуклом четырехугольнике ABCD точка M – середина стороны AD, $\angle ACB = 90^0$, угол BAC в три раза меньше угла ACD и $AB \parallel CM$. Докажите, что AD = BD.

Решение. Пусть $\angle BAC = \alpha$. Отметим точку N – середину AB. Тогда треугольник ANC – равнобедренный и $\angle NCA = \alpha$. В силу параллельности $\angle ACM = \alpha$ и $\angle MCD = 2\alpha$. Тогда CM пересекает отрезки ND и BD в серединах. Обозначим эти точки K и P соответственно. В треугольнике NCD CK – биссектриса и медиана, т.е. $CK \perp ND$. NP – средняя линия треугольника ABD, т.е. MNPD – параллелограмм с перпендикулярными диагоналями, т.е. ромб. Откуда MD = PD, значит, AD = BD.

Критерии проверки. Проведена медиана CN треугольника ABC и замечено, что угол NCA равен углу ACM – 1 балл. Доказано, что CM пересекает отрезки ND и BD в серединах, дальнейшего продвижения нет – 2 балла.

9 класс

1. Что больше $2023^{4048} + 2024^{4046}$ или $2^{2024} \cdot 2023^{2024} \cdot 1012^{2023}$?

Решение. Найдем разность данных чисел:

$$\begin{aligned} &2023^{4048} + 2024^{4046} - 2^{2024} \cdot 2023^{2024} \cdot 1012^{2023} = \\ &= (2023^{2024})^2 + (2024^{2023})^2 - 2 \cdot 2^{2023} \cdot 2023^{2024} \cdot 1012^{2023} = \\ &= (2023^{2024})^2 + (2024^{2023})^2 - 2 \cdot 2023^{2024} \cdot 2024^{2023} = \\ &= (2023^{2024} - 2024^{2023})^2 > 0 \end{aligned}$$

Так как разность положительна, следовательно, первое число больше.

Ответ: первое число больше.

Критерии: только верный ответ – 0 баллов.

2. На доске написана дробь $\frac{437}{444}$. Каждую секунду к числителю дроби добавляют натуральное число n, меньшее 40, а из знаменателя вычитают это же число n. Через какое наименьшее время могло оказаться так, что полученная дробь равна целому числу?

Решение: Через x секунд на доске появится число $\frac{437+nx}{444-nx} = \frac{-(444-nx)+881}{444-nx} = -1 + \frac{881}{444-nx}$. Значит, на доске появится целое число только тогда, когда 881 делится на $444-nx$. Заметим, что 881 - простое число, следовательно $444-nx$ может равняться только -1, 1, -881. Получаем:

1) $444-nx=1$, $nx=443$ – простое число, с учетом того, что $n<40$ получаем, что в данном случае наименьшее значение $x=443$ (при $n=1$).

2) $444-nx=-1$, $nx=445=5\cdot 89$, с учетом того, что $n<40$ получаем, что в данном случае наименьшее значение $x=89$ (при $n=5$).

3) $444-nx=-881$, $nx=1325=5^2\cdot 53$, с учетом того, что $n<40$ получаем, что наименьшее значение $x= 53$ (при $n=25$).

Следовательно, наименьшее значение $x=53$.

Ответ: 53

Критерии: Рассматриваются случаи (1)-(3), без объяснения, почему возможны только они – за каждый верно рассмотренный случай 1 балл.

Полученно представление $\frac{437+nx}{444-nx} = \frac{-(444-nx)+881}{444-nx} = 1 + \frac{881}{444-nx}$, но какой-то случай не рассмотрен — 5 баллов.

3. Известно, что квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$ имеет два положительных корня, один из которых больше 1, а другой меньше 1. Сколько корней может иметь квадратный трехчлен $(a + c)x^2 + (a + b)x + (b + c)$?

Решение: 1) Рассмотрим случай когда a>0. Так как квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два положительных корня один из которых больше 1, а другой меньше 1, то $f(0)=c>0$ и $f(1)=a+b+c<0$. Следовательно, $a+c>0$ и для квадратного трехчлена $g(x) = (a + c)x^2 + (a + b)x + (b + c)$ $g(1)=(a+c)+(a+b)+(b+c)=2\cdot(a+b+c)<0$, при $a+c>0$. Следовательно, он имеет два корня.

2) Рассмотрим случай, когда a<0. Так как квадратный трехчлен $f(x) = ax^2 + bx + c$ имеет два положительных корня один из которых больше 1, а другой меньше 1, то $f(0)=c<0$ и $f(1)=a+b+c>0$. Следовательно $a+c<0$ и для квадратного трехчлена $g(x) = (a + c)x^2 + (a + b)x + (b + c)$ $g(1)=(a+c)+(a+b)+(b+c)=2\cdot(a+b+c)>0$ при $a+c<0$. Следовательно, он имеет два корня.

Возможно объединение случаев за счет рассмотрения произведений значений квадратного трехчлена в выбранных участником характерных точках.

Возможно рассмотрение только одного случая, если указано, как второй сводится к первому.

Ответ: два корня.

Критерии: Рассмотрен только один случай, о сведении к нему второго не упомянуто — 5 баллов. Начато исследование свойств квадратичной функции, исходя из свойств квадратного трехчлена, до конца не доведено – 1 или 2 балла в зависимости от степени продвижения.

4. Существуют ли 2023 целых числа, сумма квадратов которых равна 2023202320232023, а сумма всех их попарных произведений равна 2024202420242024?

Решение 1. Допустим такие числа существуют, тогда

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2 = 2023202320232023,$$

$$a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023} = 2024202420242024.$$

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2 + 2 \cdot (\ a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}) = \\ = (\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023})^2 \\ = 2023202320232023 + 2 \cdot 2024202420242024 \end{aligned}$$

Заметим, что квадрат любого целого числа при делении на 4 дает остаток либо 0, либо 1, а число $2023202320232023 + 2 \cdot 2024202420242024$ при делении на 4 дает остаток 3. Получили противоречие. Значит, таких чисел не существует.

Ответ: Не существует.

Критерии: Рассмотрено выражение $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2023}^2 + 2 \cdot (\ a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}) = (\ a_1 + a_2 + \cdots + a_{2023})^2$, без дальнейших продвижений — 2 балла.

Только ответ — 0 баллов.

Решение 2. Заметим что для любого целого числа a_i^2 при делении на 4 дает остаток 0, либо 1 (причем для нечетных чисел – 1, для четных чисел – 0).

Так как число 20232023202320232023 дает остаток 3 при делении на 4, то количество нечетных чисел имеет вид $n = 4 \cdot k + 3$. Значит, в сумме попарных произведений $a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}$ количество слагаемых, в которых оба множителя нечетные, будет равно $\frac{(4k+3)\cdot(4k+2)}{2} =$ $= (4k + 3)(2k + 1)$ – нечетное число. Значит, в сумме $a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}$ нечетное число нечетных слагаемых. Следовательно, сумма всех возможных попарных произведений $a_1a_2 + a_1a_3 + \cdots + a_{2022}a_{2023}$ нечетна, но по условию она четная. Противоречие. Значит, таких чисел не существует.

Ответ: Не существует.

Критерии: Доказано, что если такие числа существуют, то количество нечетных чисел среди них имеет вид $n = 4 \cdot k + 3$ – 4 балла.

Только ответ — 0 баллов.

5. В выпуклом четырехугольнике ABCD $\angle B=120^{\circ}$, $\angle D=30^{\circ}$. Точки M, N, P, Q - середины BC, AD, AC и BD соотвественно. Оказалось, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности. Найдите площадь ABCD, если $BC=2\sqrt{3}$, MQ= 4.

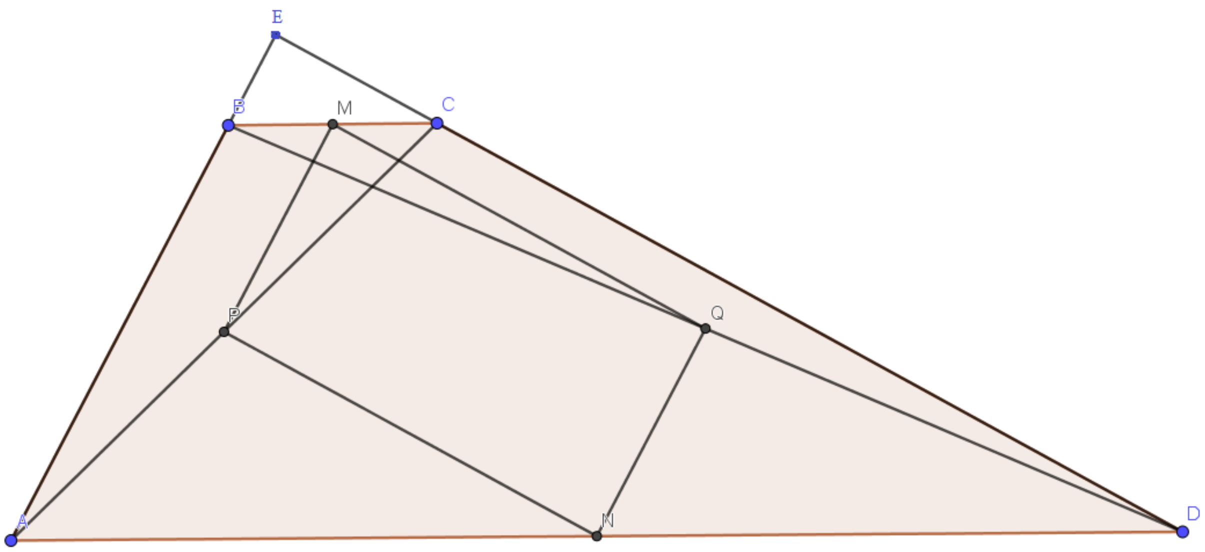
Решение: Рассмотрим ΔABC, так как M и P середины BC и AC соотвественно, то MP – средняя линия, значит $MP||AB$ и $MP=\frac{AB}{2}$.

Рассмотрим ΔABD, так как Q и N середины BD и AD соотвественно, то QN – средняя линия, значит $QN||AB$ и $QN=\frac{AB}{2}$. То есть $MP||QN$ и $QN=MP=\frac{AB}{2}$.

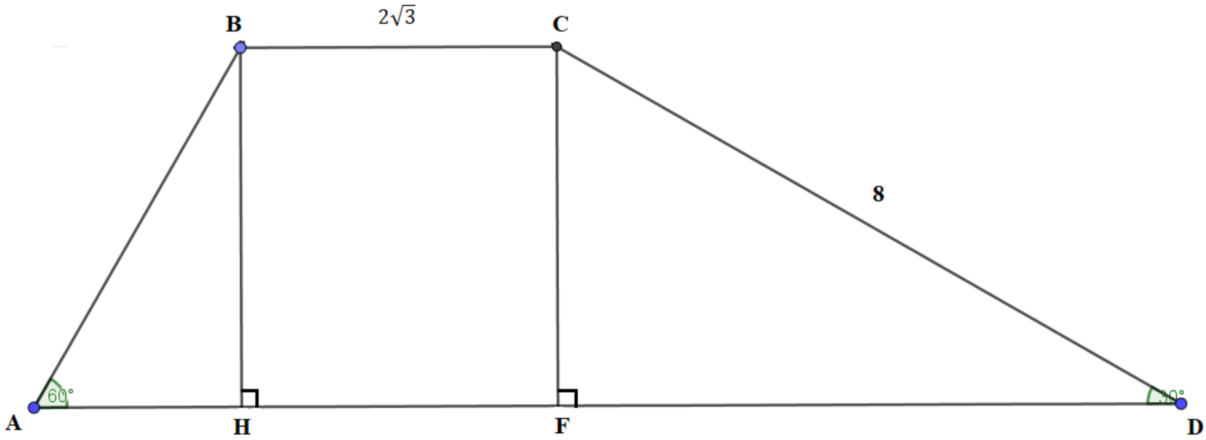
(Аналогично можно показать, что $MQ||PN$ и $MQ=PN=\frac{CD}{2}$, а значит $CD=8$)

Следовательно $MQPN$ - параллелограмм , а так как около него можно описать окружность, то $MQPN$ – прямоугольник. Так как $MP||AB$, $MQ||CD$ и $MP\perp MQ$, то $AB\perp CD$.

Продолжим стороны AB и CD до пересечения в точке E. ΔAED - прямоугольный, а так как $\angle D=30°$, то $\angle A=60°$. Заметим, что $\angle A+\angle B=180°$, значит BC||AD (AD и CD пересекаются в точке E). Получаем, что ABCD – трапеция, в которой $BC=2\sqrt{3}$, $CD=8$, $\angle A=60°$, $\angle D=30°$.



Построим высоты трапеции BH и CF, тогда $BH=CF$, $BC=HF=2\sqrt{3}$.



Рассмотрим ΔDFC – прямоугольный, с $\angle$CDF=30^0, значит $CF = \frac{CD}{2} = 4$, $DF = \frac{\sqrt{3}}{2}CD = 4\sqrt{3}$.

Рассмотрим ΔBHC – прямоугольный, с $\angle$BAH=60^0, значит $AH = \frac{\sqrt{3}}{3}BH = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Получаем, что AD=AH+HF+FD =$\frac{4\sqrt{3}}{3} + 2\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = \frac{22\sqrt{3}}{3}$

S_{ABCD}=$\frac{BC+AD}{2} \cdot CF = \frac{\frac{22\sqrt{3}}{3}+2\sqrt{3}}{2} \cdot 4 = \frac{56\sqrt{3}}{3}$

Ответ: $\frac{56\sqrt{3}}{3}$

Критерии: Доказано, что $MQPN$ – прямоугольник – 3 балла.

Доказано, что ABCD – трапеция, в которой BC =$2\sqrt{3}$, CD =8, $\angle$A =60°, $\angle$D =30° – 5 баллов.

6. Клетки доски 8×8 раскрашены в 32 цвета так что каждым цветом окрашено ровно 2 клетки. Докажите что на доске можно расставить 8 ладей так, чтобы они стояли на клетках разного цвета и не били друг друга.

Решение: Заметим, что общее число способов расставить 8 ладей на доске так, чтобы они не били друг друга равно 8·7·6·5· 4·3· 2·1= 8! (на первой вертикали 8 способами, на второй 7 и т.д.). Предположим, что нельзя расставить как указано в условии задачи. Тогда для любой расстановки не бьющих друг друга ладей хотя бы какие-то две из них стоят на клетках одного цвета. Теперь подсчитаем количество способов расстановки 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета, обозначим это число k: пару ладей стоящих на клетках одного цвета можно расставить не более чем 32 способами (их может быть меньше, так как клетки одного цвета могут стоять на одной горизонтали или вертикали, то мы ладьи поставить туда не можем). Остальные 6 ладей можно расставить 6! способами. Значит общее число способов расстановки в этом случае $k \le 32 \cdot 6!$ Предположим, что ему не удастся это сделать. Это означает, что $k \ge 8!$ Но тогда $32 \cdot 6! \ge 8! \Leftrightarrow 32 \ge 8 \cdot 7$. Получаем противоречие.

Критерии: Найдено только количество способов расстановки 8 ладей на шахматной доске, чтобы они не били друг друга – 2 балла.

Найдена оценка на количество расстановок 8 ладей так, чтобы какие-то две ладьи стояли на клетках одного цвета – 4 балла.

10 класс

1. Сколько всего шестизначных натуральных чисел, десятичная запись которых не содержит цифры 5 и каждая последующая цифра меньше предыдущей?

Ответ: 84 числа.

Решение. *Первое решение.* Рассмотрим десятизначное число 9876543210, цифры которого расположены в порядке убывания. Вычеркивая из него ровно четыре какие-либо цифры, будем получать шестизначное число, удовлетворяющее условию убывания цифр. Чтобы оставшееся число не содержало цифру «5», нужно вычеркивать его одним из четырех цифр. Все такие возможные вычеркивания цифр дадут все удовлетворяющее условию шестизначные числа. Посчитаем количество таких способов вычеркивания – это количество сочетаний из 9-ти по 3(так как цифру 5 вычеркиваем обязательно), или численно, $C_9^3 = \frac{9!}{3!(9-3)!} = \frac{7\cdot8\cdot9}{1\cdot2\cdot3} = 84$ способами. Можно первоначально рассмотреть девятизначное число 987643210 с «удаленной» заранее цифрой «5» и вычеркивать любые 3 цифры, после чего остаётся 6-значное число, удовлетворяющее условию задачи. Подсчет такой же, $C_9^3 = 84$.

Второе решение. Можно посчитать все комбинации чисел с заданными условиями, если перебирать их, например, в следующем порядке: первая цифра числа(старший разряд) не может быть меньше 6, потому перебираем варианты следующих за ним цифр числа. Например, чисел, начинающихся с «6» всего одно (643210). Для чисел, начинающихся с цифры «7» это 6 вариантов (из числа 643210 нужно вычеркнуть ровно одну цифру). Для чисел, начинающихся с «8» это $C_7^2 = 15$ вариантов (из числа 7643210 нужно вычеркнуть ровно две цифры). Для чисел, начинающихся с «9» это $C_8^3 = 56$ вариантов (из числа 87643210 нужно вычеркнуть ровно три цифры). Итого, $C_5^0 + C_6^1 + C_7^2 + C_8^3 = 1 + 6 + 21 + 56 = 84$ числа.

Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Правильно произведён подсчёт вариантов чисел при обоснованном способе перебора – 7 баллов. Предложен обоснованный способ подсчета вариантов требуемых по условию чисел (должно быть обосновано получение различных шестизначных чисел, каждое ровно по одному разу), при этом сам подсчет выполнен неверно – 3 балла.

Выписаны правильно все 84 числа в упорядоченном виде (видно что ничего не пропущено и нет лишнего – 7 баллов, что-то пропущено или лишнее или неупорядочено – 0 баллов.

2. Решите уравнение в целых числах: $19a^3 - 7b^2 = 2024$.

Ответ: решений нет (пустое множество).

Решение. *Первое решение.* Рассмотрим равенство между правой и левой частями уравнения в виде равенства остатков от деления на 7. В левой части уравнения выражение $(19a^3 - 7b^2)$ сравнимо с соответствующим остатком выражения $5a^3$. Правая часть имеет остаток 1 при делении на 7. Заметим, что куб целого числа при делении на 7 имеет остатками только три числа: $0, 1$ и 6. Тогда, всеми возможными остатками от деления на 7 выражения $5a^3$ являются числа $0, 2$ или 5. Тогда, делаем вывод о том, что остатки от деления правой и левой частей на число 7 различаются, а значит, равенство не может быть достигнуто на при каких целых a и b. Значит, целочисленных решений нет.

Второе решение. Рассмотрим разложение числа $2024 = 19 \cdot 3 + 7 \cdot 281$. Тогда уравнение можно записать в виде $19(a^3 - 3) = 7(b^2 + 281)$, откуда в силу взаимной простоты чисел 19 и 7, равенство правой и левой части последнего уравнения возможно только если выражение $(a^3 - 3)$ кратно 7, а $(b^2 + 281)$ кратно 19. Но так как куб целого числа при делении на 7 не даёт остатка 3 (остатки только $0, 1$ и 6), то первое условие не выполнено, следовательно равенство не возможно ни при каких целых a и b. Значит, целочисленных решений нет.

Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Обоснованно полученный ответ – 7 баллов. Уравнение приведено к одному из видов уравнения с разложением на множители и обоснованно предложено проверить равенство с помощью проверки кратности, однако дальнейшее продвижение в решении отсутствует – 1 балл. Приведены верные утверждения об остатках деления кубов и квадратов целых чисел (или соответствующей кратности) на числа 7, 19, но без продвижения в дальнейшем решении – дополнительно 2 балла.

3. Рассматриваются все трапеции площади 1, длины диагоналей которых d_1 и d_2, $d_1 \geq d_2$. Какова наименьшая возможная длина диагонали d_1 у таких трапеций? (Напомним, что трапецией является выпуклый четырехугольник, две стороны которого параллельны, две другие – не параллельны).

Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. <u>*Первое решение.*</u> Рассмотрим трапецию как частный случай четырехугольника, для которого площадь можно посчитать с помощью формулы $\mathrm{S} = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_2 \cdot \sin(\phi)$, где ϕ – угол между диагоналями, длины которых равны d_1 и d_2. Пусть, для определенности, одна из диагоналей d_1, не меньше, чем другая, то есть $d_1 \geq d_2$. Тогда верна следующая оценка в виде цепочки неравенств: $(\mathrm{d}_1)^2 \geq \mathrm{d}_1 \cdot \mathrm{d}_2 = \frac{2\,\mathrm{S}}{\sin(\phi)} \geq 2\mathrm{S} = 2$, где значение $\sin(\phi)$ оценено сверху максимальным значением 1 при $\phi = 90°$. Следовательно, верно окончательно $(\mathrm{d}_1)^2 \geq 2$, откуда следует оценка длины большей диагонали: $\mathrm{d}_1 \geq \sqrt{2}$. Заметим, что крайнее значение $\sqrt{2}$ в оценке может достигаться при одновременно выполненных условиях $\mathrm{d}_1 = \mathrm{d}_2$ и $\phi = 90°$. Таким образом, если найдется пример такой трапеции, то ответом к задаче будет значение $\sqrt{2}$. Действительно, такая трапеция равнобокая существует: с высотой $h = 1$ и основаниями $a = \frac{1}{2}$, $b = \frac{3}{2}$.

<u>*Второе решение.*</u> Рассмотрим для выбранной произвольной трапеции величины проекций p_1 и p_2 двух диагоналей d_1 и d_2 на одну из двух прямых, на которых располагаются основания трапеции. Заметим, что сумма длин $(p_1 + p_2)$ этих проекций равна сумме $(a + b)$ длин двух оснований трапеции, а значит, по свойству проекций, $(d_1 + d_2) \geq (p_1 + p_2) \geq (a + b)$. Пусть, для определенности, одна из диагоналей d_1, не меньше, чем другая, то есть $d_1 \geq d_2$. Тогда, формула для площади трапеции $S_{\text{тр}} = \frac{(a+b)}{2} \cdot h = 1$, где h - величина высоты трапеции, дает оценку для величины диагонали в виде неравенства:

$$\frac{(a+b)}{2} = \frac{1}{h},\ \ p_1 \geq \frac{p_1 + p_2}{2} \ \Rightarrow\ p_1 \geq \frac{(a+b)}{2} \ \Rightarrow\ p_1 \geq \frac{1}{h}.$$

Так как $d_1^2 = p_1^2 + h^2$, то с учётом предыдущего верно также следующее неравенство:

$$d_1^2 = p_1^2 + h^2 \geq \left(\frac{1}{h}\right)^2 + h^2 \geq 2,$$

где последнее неравенство верно в силу суммы взаимно обратных чисел(неравенство между средними, неравенство Коши). Следовательно, $d_1 \geq \sqrt{2}$. Пример для $d_1 = \sqrt{2}$ вытекает из свойств неравенства о сумме взаимно обратных чисел(равенство верно для равных значений $\frac{1}{h} = h = 1$). Например, равнобокая трапеция с высотой $h = 1$ и основаниями $a = \frac{1}{2},\ b = \frac{3}{2}$ имеет диагонали $d_1 = d_2 = \sqrt{2}$.

Замечания к оцениванию. Заметим, что вопрос в задаче предполагает выписывание числового значения и обоснования, что данное значение – наименьшее из всех возможных (тип задачи «оценка+пример»). Потому, оценка выполнения данного задания предполагает наличия в решении хотя бы одной из двух этих частей (оценка величины длины диагонали и пример такой трапеции, у которой такая диагональ найдётся). Заметим, что квадрат не является верным примером, так как формально не является трапецией. Ответ без обоснования и без приведенного примера – 0 баллов. Правильный пример без обоснования(оценки) – 2 балла. Обоснованно полученный ответ (оценка и пример) – 7 баллов. Обоснованная оценка величины большей диагонали без приведённого примера – 5 баллов.

4. Известно, что уравнение $x^2 + bx + c = 0$ имеет два различных действительных корня. Сколько различных действительных корней имеет уравнение $x^4 - bx^3 + (c-2)x^2 + bx + 1 = 0$?

Ответ: 4 различных корня.

Решение. Рассмотрим свойства корней x_1, x_2 для заданного квадратного уравнения. По теореме Виета имеем: $x_1 + x_2 = -b,\ x_1 \cdot x_2 = c$. Заменим теперь в уравнении 4-го порядка коэффициенты b и c через корни x_1, x_2 первого уравнения:

$$x^4 + (x_1 + x_2) \cdot x^3 + (x_1 \cdot x_2 - 2) \cdot x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + 1 = 0$$

и представим (разложим на множители) левую часть уравнения на два симметричных квадратичных выражения:

$$x^4+(x_1+x_2)x^3+(x_1x_2-2)x^2-(x_1+x_2)x+1$$
$$=(x^2+x_1x-1)(x^2+x_2x-1),$$
откуда корни уравнения 4-ой степени можно искать как решения двух квадратных уравнений: $x^2+x_1x-1=0$ и $x^2+x_2x-1=0$.

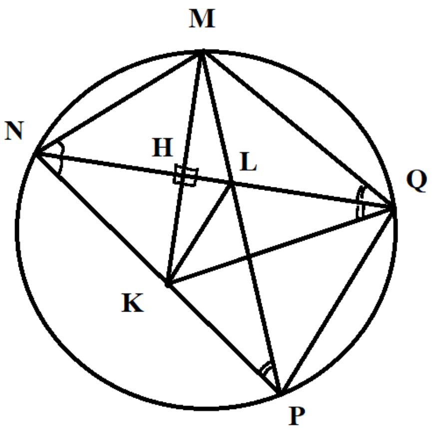
Действительно, оба полученных квадратных уравнения имеют по два корня, так как дискриминант у обоих строго больше нуля: $D_1=x_1^2+4>0$, $D_2=x_2^2+4>0$. Осталось показать, что все четыре корня различны. От противного, предполагая, что имеются общие корни у двух уравнений, составим систему:
$$\begin{cases}x^2+x_1x-1=0,\\x^2+x_2x-1=0,\end{cases}$$
у которой в силу предположения имеется хотя бы одно решение. Тогда, вычитая из одного уравнения другое, получим как следствие условие: $x_1x-x_2x=0$, которое имеет решение только при $x_1=x_2$, что противоречит условию задачи. Следовательно, все четыре корня двух квадратных уравнений попарно различны. Итого, всегда 4 различных корня.

Решение могло проводиться с помощью замены переменной $t=x-\frac{1}{x}$, *которая очевидно следует после деления исходного уравнения на* x^2 *(x=0 тоже очевидно его корнем не является).*

Замечания к оцениванию. Заметим, что в задаче требуется оценить количество различных корней уравнения 4-й степени. Для этого потребуется либо предъявить соответствующие корни и проверить их на совпадение, либо обосновать наличие определенного количества корней с помощью информации о существовании различных корней у заданного квадратного. Ответ без обоснования – 0 баллов. Уравнение 4-го порядка записано в симметричном виде через корни квадратного уравнения, или же выполнена замена переменных, дальнейшее продвижение отсутствует – 1 балл. Уравнение приведено к виду с разложением на множители или найдены все 4 корня уравнения 4-го порядка, анализа количества корней не приведено – 4 балла. Доказано утверждение, что все корни уравнения 4-го порядка попарно различны – дополнительно 2 балла.

5. В треугольнике MNP известно, что NP>MN. Биссектриса NL внутреннего угла треугольника пересекает окружность, описанную около треугольника

MNP, в точке Q. На отрезке NP выбрана точка K так, что NK=NM. Докажите, что около четырехугольника KPQL можно описать окружность.



Доказательство. Рассмотрим точку H как точку пересечения прямых NQ и MK. Треугольник MNK равнобедренный, так как по условию NK=NM. Следовательно, биссектриса угла N является одновременно медианой и высотой в треугольнике. Тогда, NL ⊥ MK, откуда в треугольнике MKQ отрезок QH является высотой и медианой, а значит, и биссектрисой угла при вершине Q в треугольнике. Тогда верно равенство углов HQM=HQK.

Рассматривая теперь угол NQM как вписанный в окружность и опирающийся на дугу MN, заметим, что на ту же дугу опирается и вписанный угол MPN, откуда верно двойное равенство углов NQM=HQK=MPN. Но это равенство углов ведёт к выполнению условия признака вписанности 4-хугольника KPQL в окружность, так как углы в равенстве LQK=LPK суть углы, под которыми видна сторона LK из вершин P и Q. Доказательство закончено.

Замечания к оцениванию. Заметим, что в задаче требуется доказать вписанность некоторого четырёхугольника (в окружность). Поэтому, подойдет любой из известных признаков вписанного 4-хугольника(сумма противоположных внутренних равна 180, внешний равный противоположному внутреннему, равенство углов двух смежных вершин, из которых видна одна и та же противоположная сторона, антипараллельность сторон, использование метрических признаков и др.). Заметим также, что 4-хугольник MNKQ является ромбоидом, диагонали NQ и MK которого перпендикулярны и являются биссектрисами углов при соответствующих вершинах, откуда вытекают равенства нескольких пар углов и можно доказать вписанность KPQL с помощью различных эквивалентных формулировок признака. За альтернативные способы доказательства(могут быть доказательства, основанные на фактах, не описанных выше) баллы не снимать!

В решении обоснованно доказано утверждение задачи – 7 баллов. Недостаточно обоснованное решение, содержащее верный ход мысли оценивать с помощью одного из следующих критериев:

- доказано равенство углов NQK=MPN, дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла;
- доказано равенство углов NLK=KPQ, дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла;
- доказана антипараллельность прямых KL и QP, дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла;
- доказано, что NQ·NL=NP·NK, дальнейшее продвижение отсутствует – 3 балла.

6. В классе учатся 20 учеников. Известно, что любые два ученика либо дружат друг с другом, либо не дружат. Если дружат – могут списать домашнее задание друг у друга, если не дружат – не могут. Учитель знает, что если хотя бы один ученик сделает домашнее задание, то к следующему уроку оно будет сделано у всех. Докажите, что можно выделить 6 учеников из этого класса так, что все остальные либо дружат с кем-то из этих шести, либо дружат с кем-то из друзей этих шести.

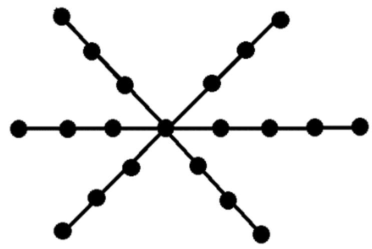
Доказательство. *Первое решение.* Заметим, что доказать нужно тот факт, что всех учеников можно разбить на 6 групп так, что в каждой группе найдется отмеченный ученик, такой, что либо дружит с любым другим в этой группе, либо дружит с его другом в этой группе. Задача состоит в обосновании возможности составить такое разделение класса на группы, удовлетворяющее всем условиям задачи.

Для двух любых учеников А и В составим цепочку друзей $\text{А} - \text{Б}_1 - \text{Б}_2 - \ldots - \text{Б}_k - \text{В}$ и будем её длиной считать число $(k+1)$ последовательных дружественных связей. Также, будем называть цепочку друзей $\text{А} - \text{Б}_1 - \text{Б}_2 - \ldots - \text{Б}_k - \text{В}$, длина которой больше 1,замкнутой, если А дружит с В. Мы можем считать, что в классе нет замкнутых цепочек, так как, если разорвать любую из них, возникнет группа учеников со строго меньшим числом дружеских связей, для которого условие задачи останется в силе. Если для такого класса утверждение задачи будет доказано, то оно будет доказано и для исходного класса.

Выделим из учеников класса самую длинную цепочку друзей $А - Б_1 - Б_2 - \ldots - Б_k - В$. Если таких цепочек будет несколько, выберем любую из них. Если длина самой длинной цепочки меньше или равна 4, то все ученики из этой цепочки оказываются друзьями или друзьями друзей ученика $Б_2$.Пусть длина самой длинной цепочки больше или равна 5. Тогда сформируем подгруппу учеников, состоящую из $Б_2$ и тех его друзей и друзей друзей, которые не связаны с $Б_2$ через $Б_3$. Сам $Б_3$ тоже не попадает в эту подгруппу. Заметим, что количество учеников в сформированной группе не меньше 3. Для оставшихся учеников класса условие задачи по-прежнему выполнено, то есть любые два ученика, не вошедшие в выделенную подгруппу, могут быть соединены цепочкой друзей.

Будем проделывать указанную процедуру, пока будут находиться цепочки длиной не меньше 4. Заметим, что мы проделаем эту процедуру не более 5 раз. В итоге, число учеников, оставшихся не включёнными в какую-либо подгруппу, останется не больше, чем 20 – 3·5 = 5 учеников. Максимальная цепочка, составленная из них, уже имеет длину меньше 5. Таким образом, сформированных подгрупп не более 6. Если же подгрупп получилось меньше, то «добрать» выделенных учеников до 6 можно, взяв любых из оставшихся, это не противоречит условию задачи.

Второе решение. Рассмотрим граф, вершинами которого являются ученики, ребра графа – дружественная связь между парой учеников. Путём между двумя вершинами назовем набор вершин, последовательно соединённых соответствующими рёбрами. Длиной пути между двумя вершинами назовем количество рёбер в этом пути. Расстоянием между двумя вершинами графа будем называть наименьшую длину пути, соединяющего данные вершины. Из условия задачи следует, что граф связный. Если в графе есть циклы длины более 1, то можно удалением соответствующих рёбер сформировать из первоначального связного графа дерево(например, остовное). Заметим, что доказать нужно тот факт, что граф можно разбить на не более 6 подграфов или отдельных односвязных графов(например, удалением некоторых ребер) так, чтобы в каждом таком подграфе нашлась одна вершина, от которой до любой другой вершины подграфа расстояние будет не более 2. Процедуру деления дерева на подграфы будем проводить следующим образом. Пусть в первоначальном дереве есть максимальный путь длины не менее 5, например, соединяющий вершины А– $Б_1$– $Б_2$– $Б_3$ – … – $Б_k$ – В, $k \geq 4$, и пусть ребро А – висячая вершина. Тогда уберём ребро $Б_2$– $Б_3$, после чего получится двухсвязный граф, одна из двух компонент которого содержит путь А– $Б_1$– $Б_2$, а вторая компонента – вершину $Б_3$. Заметим, что первая компонента содержит не менее 3-х вершин, а вторая компонента является деревом. Продолжаем процедуру с выделением подграфа из второй компоненты, пока это возможно. Заметим, что таких шагов можно сделать не более пяти раз, соответственно получим не более 6-ти подграфов, удовлетворяющих условию задачи.



Замечания к оцениванию. Заметим, что в задаче требуется произвести процедуру выделения групп учеников, соответствующих условиям задачи, причём, в условиях всех возможных комбинаций дружественных связей между учениками. Поэтому, решения, основанные на частных случаях таких комбинаций, оцениваются как 0 баллов. Заметим, что для проверки правильности решения(алгоритма выбора 6 учеников) можно принять во внимание один из «крайних» примеров исходного графа класса(см. рисунок) – для него нет возможности выделить менее 6 групп.

Полный обоснованный ответ (как с применением графов, так и без) оценивается в 7 баллов. Если доказательство недостаточно обоснованное или не полное, но содержащее верный ход мысли, некоторые обоснованные достижения можно оценивать с помощью следующих критериев:
- указана процедура отделения(образования) не более 6 групп учеников класса, удовлетворяющая условиям задачи, обоснование неполное или отсутствует – 3 балла.

11 класс

1. У математика есть банковская карта с четырехзначным пин-кодом, состоящим из ненулевых цифр. Известно, что если пин-код карты умножить на 6 и поделить на 5, то получится число из тех же цифр, но в обратном порядке. Найдите все возможные значения такого пин-кода.

   Решение. Обозначим х=$\overline{abcd}$ пин-код (a, b , c, d – цифры). По условию $a \neq 0$ и $d \neq 0$ и $6\overline{abcd} = 5\overline{dcba}$. Правая часть делится на 5, поэтому $d = 5$. Очевидно цифра a – чётная и меньше цифры d. С другой стороны, $a + 1 \geq {}^5/_6\, d > 4$, следовательно, $a = 4$. Имеем $6(4000 + 100b + 10c + 5) = 5(5000 + 100c + 10b + 4)$. Отсюда $550b - 440c = 990$, $5b - 4c = 9$, или $5(b - 1) = 4(c + 1)$. Следовательно, $b = 5$, $c = 4$ или $b = 9$, $c = 9$.

   Ответ. х=4545 или 4995.

   Рекомендации к оцениванию.

   Если пин-код выписан без всякого обоснования – 0 баллов.

   Если пин-код выписан и проверен, что удовлетворяет условиям задачи – 1 балл за каждый пин-код.

   Если обоснованно найден только один из пин-кодов - 4 балла.

2. Приведите пример такого многочлена третьей степени с целыми коэффициентами, для которого иррациональное число $a = \sqrt[3]{2023 - \sqrt{2022 \cdot 2024}} + \sqrt[3]{2023 + \sqrt{2022 \cdot 2024}}$ является корнем.

   Решение. Заметим, что 2022·2024=(2023-1) · (2023+1)=2023^2-1, тогда число $a = \sqrt[3]{2023 - \sqrt{2022 \cdot 2024}} + \sqrt[3]{2023 + \sqrt{2022 \cdot 2024}}$ можно представить в виде: $a = b + \frac{1}{b}$, где $b = \sqrt[3]{2023 + \sqrt{2023^2 - 1}}$. Теперь воспользуемся тождеством $(b + \frac{1}{b})^3 = b^3 + \frac{1}{b^3} + 3\left(b + \frac{1}{b}\right)$, при этом $b^3 + \frac{1}{b^3} = 2 \cdot 2023$. Следовательно, $a^3 = (b + \frac{1}{b})^3 = 2 \cdot 2023 + 3a$ или $a^3 - 3a - 4046 = 0$.

   Ответ. $P(x) = x^3 - 3x - 4046$.

   Рекомендации к оцениванию.

   Если замечено, что а $= b + \frac{1}{b}$, где $b = \sqrt[3]{2023 + \sqrt{2023^2 - 1}}$ - 2 балла;

Получено тождество $(b + \frac{1}{b})^3 = b^3 + \frac{1}{b^3} + 3\left(b + \frac{1}{b}\right)$ - 4 балла.

3. Пусть квадратные трёхчлены $g(x)$ и $h(x)$ удовлетворяют неравенству $g'(x)h'(x) \geq |g(x)| + |h(x)|$ при всех действительных x. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=g(x)\cdot h(x)$ на всей числовой оси.

Решение. Пусть x_1, x_2 – абсциссы вершин парабол $y = g(x)$ и $y = h(x)$. Тогда $g(x) = a(x - x_1)^2 + b$, $h(x) = c(x - x_2)^2 + d$ ($a, c \neq 0$, b, d – ординаты вершин парабол), и исходное неравенство переписывается в виде $4ac(x - x_1)(x - x_2) \geq |a(x - x_1)^2 + b| + |c(x - x_2)^2 + d|$. Подставляя в это неравенство $x = x_1$, получаем $|b| + |c(x - x_1)^2 + d| \leq 0$, откуда $b = 0$ и $c(x_1 - x_2)^2 + d = 0$. По аналогичным соображениям $d = 0$, поэтому из предыдущего равенства следует, что $x_1 = x_2$. Так как $4ac(x - x_1)^2 \geq 0$ при всех x, то $ac > 0$. Поэтому $f(x)=g(x)h(x)=ac(x-x_1)^4$ и наименьшее значение $f(x)$ равно 0.

Ответ. 0.

Рекомендации к оцениванию

Получено неравенство вида $4ac(x - x_1)(x - x_2) \geq |a(x - x_1)^2 + b| + |c\left(x - x_2\right)^2 + d|$ - 1 балл. Получено, что $b = d = 0$ – 2 балла. Доказано, что $ac > 0$ – 2 балла. Получено представление $f(x)=g(x)h(x)=ac(x-x_1)^4$- 5 баллов.

4. В гостинице из 2023 одноместных комнат действуют правила: 1) каждый номер сдается ровно на сутки; 2) внутри каждой комнаты висит табличка с номером другой комнаты, в которую можно переехать из текущей.

В понедельник в 12.00 в гостиницу заселились 2023 жителя и, соблюдая правила проживания, провели там m дней (m>1). Оказалось, что последние сутки пребывания в отеле они провели в тех же номерах, в которые заселились изначально; при этом каждый гость успел пожить в m-1 разных комнатах. За какое наименьшее количество дней это могло произойти?

Решение. Схему переселения гостей отеля удобно представить с помощью ориентированного графа с вершинами $R_1, R_2, \ldots, R_{2023}$. Поскольку все комнаты в отеле одноместные и из каждой комнаты можно переселяться в другую строго по указанному номеру, то в каждую вершину графа входит ровно одна дуга и выходит одна дуга. Пусть m – количество суток, проведенных гостями в отеле. Согласно условию задачи каждый гость побывает ровно в $m-1$ разных комнатах, чему будет соответствовать маршрут в графе по циклу из $m-1$ вершины. Поскольку каждая вершина графа имеет ровно один вход и один выход, получим, что граф состоит из непересекающихся циклов по $m-1$ вершине каждый. Теперь учитывая, что $2023 = 7 \cdot 17^2$ получим, что наименьший цикл состоит из 7 вершин. Таким образом, $m = 8$.

Ответ: 8 суток.

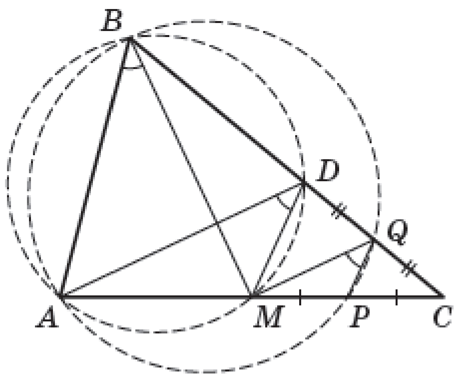
Рекомендации к оцениванию

Верный ответ без какого-либо обоснования – 0 баллов. Множество комнат разбито на непересекающиеся подмножества (или циклы в графе) – 2 балла.

Доказано, что эти подмножества имеют одинаковое количество элементов – 3 балла.

5. Окружность, проходящая через вершины A и B треугольника ABC пересекает его стороны BC и AC во внутренних точках Q и P соответственно, причем $AP = 3PC$. Докажите, что $\angle ABM = \angle MQP$, где BM – медиана треугольника ABC.

Решение. Проведем через точку M прямую, параллельную PQ, до пересечения со стороной BC в точке D. Отрезок PQ является средней линией треугольника MDC и делит сторону DC пополам. Следовательно, отрезок MQ – средняя линия треугольника ADC, а значит, параллелен AD. Поэтому $\angle ADM = \angle MQP$ (как углы с параллельными сторонами).



Осталось заметить, что $\angle BAM = 180° - \angle BQP = 180° - \angle BDM$, откуда получаем, что четырёхугольник $ABDM$ - вписанный, и, как следствие, углы ABM и ADM равны.

Рекомендации к оцениванию:

Проведено дополнительное построение (точка D) – 2 балла;

Доказана параллельность AD и MQ – 2 балла;

Доказано, что ABDM вписанный – 2 балла.

6. Дана сфера единичного радиуса и точка S на ней. Рассматриваются всевозможные тетраэдры с вершиной S, имеющие попарно перпендикулярные ребра, исходящие из этой вершины. Докажите, что плоскости оснований всех таких пирамид имеют непустое пересечение. Найдите множество, являющееся этим пересечением.

Решение. Пусть SABC – одна из таких пирамид. Построим точки S^1, A^1, B^1 и C^1, симметричные относительно центра сферы O точкам S, A, B и C соответственно.

Тогда $SABCS^1A^1B^1C^1$ – прямоугольный параллелепипед, вписанный в сферу радиуса 1. Множество всех построенных таким образом параллелепипедов имеет общие вершины S и S^1, образующие диагонали всех параллелепипедов. Заметим, что все плоскости ABC будут пересекать этот отрезок SS^1. Докажем, что все эти плоскости проходят через одну точку на отрезке SS^1. Рассмотрим сечение SCS^1C^1 , тогда AB пересекает сторону SC^1 в точке M так, что $SM=MC^1$. Обозначим точку пересечения CM и SS^1 через P. Тогда из подобия треугольников CPS^1 и SPM находим PS=2/3. Поскольку это верно для всех прямоугольных параллелепипедов, вписанных в сферу радиуса 1, то P и есть искомая точка. Докажем, что она единственна.

Предположим, что существует вторая точка P*, отличная от P, принадлежащая всем плоскостям ABC. Очевидно, что точка P* не может лежать на прямой SS^1. Тогда точка P**, симметричная точке P* относительно прямой SS^1, тоже должна принадлежать всем этим плоскостям. Следовательно, все плоскости ABC должны проходить через точку P перпендикулярно прямой SS^1. Получили очевидное противоречие.

Рекомендации к оцениванию.

1. Построен параллелепипед $SABCS^1A^1B^1C^1$ –2 балла;
2. Задача верно сведена к плоской и найдена точка P, но ее единственность не доказана – 5 баллов;

3. При использовании координатного метода выбрана система координат, привязанная к SABC – 1 балл;
4. Доказано, что искомое множество может состоять из единственной точки (единственность), сама точка не найдена – 2 балла;
5. При правильном использовании координатного или другого аналитического метода получен неверный ответ только из-за арифметических ошибок – 4 балла.