ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 5-6 КЛАССА РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН ПО МАТЕМАТИКЕ 2024-2025 УЧЕБНЫЙ ГОД МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, Р.Н.Гарифуллин, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров

УФА - 2024

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.
4. Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:
а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;
б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;
в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;
г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

5. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.
6. Во время проверки работ 27.11.24 и 28.11.24 будет работать телеграмм-группа Муниципальные жюри математика 2024, ссылка https://web.telegram.org/a/#-4549927819 либо https://t.me/+3LI7ojv9VaxjMGNi

5 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критерий по баллам – также используются общие критерии.

1. Комбайнёр Азат купил в супермаркете четыре бутылки кумыса и рессору для своего комбайна. Водитель Ильяс купил в этом магазине пробку для бензобака своего автомобиля, потратив денег вдвое больше Азата. Известно, что пробка стоит втрое дороже рессоры. Во сколько раз рессора дороже бутылки кумыса?

   Ответ: В 8 раз.

   Решение. По условию пробка стоит столько же, сколько 3 рессоры, и при этом столько же, сколько 2 рессоры и 8 бутылок кумыса. Значит, 8 бутылок кумыса стоят столько же, сколько одна рессора, поэтому рессора в 8 раз дороже.

   Критерии: получение равенства 3 рессоры=2 рессоры+8 бутылок, а далее неверно – 3 балла. Любое верное решение – 7 баллов.

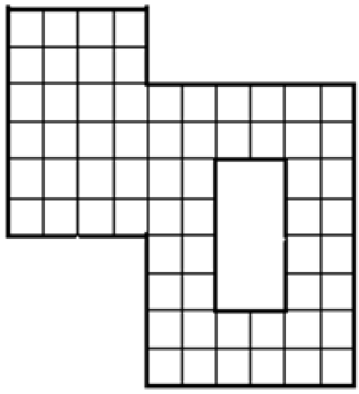
2. В квадрате 3х3 расположились 9 представителей рыцарей и лжецов по одному в каждой клетке. Рыцарь всегда говорит правду, а лжец всегда лжёт. Каждый из них сказал: «У меня ровно 3 соседа – лжецы». Сколько рыцарей могло быть среди них? Найти все варианты и доказать, что других нет. Соседними считаются клетки, у которых есть общая сторона.

   Ответ: 4.

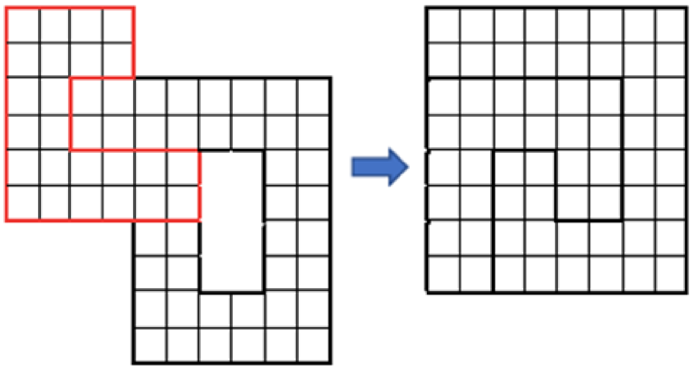
   Решение. У угловых клеток только две соседние клетки, поэтому там точно стоят лжецы. Если в центральной клетке стоит рыцарь, то у него найдётся сосед-рыцарь, который скажет ложь, чего не может быть. Значит, в центральной клетке стоит лжец и все оставшиеся 4 клетки имеют ровно по 3 соседа-лжеца, тогда там стоят рыцари.

Критерии: Получен только правильный пример с 4 рыцарями – 2 балла. Объяснено, что в угловых клетках стоят лжецы – 2 балла. Доказано, что в центре не стоит рыцарь – 3 балла. Баллы суммируются.

3. Фигуру (см.рис.) разрезали на 2 части и из полученных частей сложили один квадрат. Покажите, как это можно сделать.



Решение:



Критерии: показан верный разрез, но не показано как сложить квадрат – 3 балла. Любое верное решение – 7 баллов.

4. Можно ли найти десять подряд идущих натуральных чисел и поставить их в каком-то порядке вместо звёздочек в следующих равенствах:

$$* - * = 4, \quad * - * = 5, \quad * - * = 6, \quad * - * = 7, \quad * - * = 8$$

так, чтобы все пять равенств оказались верными? Каждое из 10 чисел должно быть использовано ровно один раз.

Ответ: Нельзя.

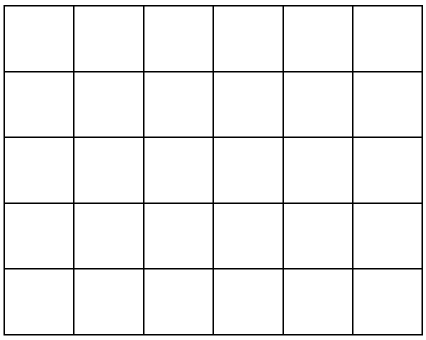
Решение. Там, где разность чётная, вычитаемое и уменьшаемое — одной чётности, где нечётная — разной. Среди 6 чисел, образующих три пары одной чётности, есть либо 4 чётных числа, либо 4 нечётных, а среди 4 чисел, образующих две пары разной чётности, чётных и нечётных чисел по

2. В первом случае среди 10 выбранных нами чисел должно быть 6 чётных, во втором — 6 нечётных, а на самом деле их и тех, и других по пять.

Критерии: если разобраны только частные случаи - 0 баллов, просто ответ – 0 баллов. За идею чётности без дальнейших верных продвижений – 1 балл.

Комментарий: есть решение, где складываются левые и правые части равенств – слева получается нечётное число из-за нечётного количества нечётных чисел, а справа – чётное число, из чего и следует ответ.

5. Пол в детской комнате имеет форму клетчатого прямоугольника 5x6. Мама застелила пол по клеточкам двенадцатью прямоугольными коврами разной площади. Докажите, что какая-то клетка покрыта хотя бы четырьмя коврами. Ковры сгибать нельзя, каждый из них застилает целое количество клеток.



Решение. Заметим, что ковры с площадью 7, 11, 13, 14 не поместятся внутрь квадрата 5x6 *(1)*. Тогда суммарно ковры покрывают не меньше 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 8 + 9 + 10 + 12 + 15 + 16 = 91 клетки. Если бы все клетки были покрыты не более трех раз, всего было бы не более 90 клеток. Значит, хотя бы одна клетка покрыта хотя бы 4 раза.

Критерии: сделан вывод *(1)* – 1 балл. При сложении ковров сделана арифметическая ошибка в большую сторону, вывод сделан верно – 5 баллов.

6 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критерий по баллам – также используются общие критерии.

1. Витя записал на доске два двузначных числа. Таня записала на доску наибольший общий делитель этих чисел и их наименьшее общее кратное. Риф перемножил числа, записанные Таней, и получил число 640. Найдите хотя бы две пары чисел, которые могли быть записаны Витей и покажите, что они удовлетворяют условию задачи.

Решение. Например: 1) 64 и 10. Тогда их НОД равен 2, а НОК 320; $2 \cdot 320 = 640$
2)32 и 20. Тогда их НОД равен 4, а НОК 160; $160 \cdot 4 = 640$.

Критерии оценки: Приведена одна пара чисел и показано, что она удовлетворяет условию задачи – 1 балл. Приведены две пары чисел, удовлетворяющих условию задачи, но не показано, что они удовлетворяют условию задачи – 3 балла. Арифметические ошибки при верном в целом решении – не более 4 баллов.

2. В школе «Лучшие во Вселенной» разрешены только три вида оценок: «отлично», «замечательно» и «красота». В один из дней в этой школе была проведена административная контрольная работа по арифметике. Учеников, получивших за эту работу «замечательно» в три раза больше, чем получивших «отлично». Седьмая часть учеников, получивших «красота» равна половине от всех получивших «отлично» и «замечательно». Какую часть от всех, выполнявших работу, составляют получившие «отлично»?

Решение. Пусть x учеников получили «отлично», y – «замечательно», z – «красота». Тогда y=3x (*) и $\frac{1}{7}z = \frac{1}{2}(x + y)$. Домножая последнее равенство на 14, получим: 2z=7x+7y, а учитывая (*) 2z=28x или z=14x. Тогда контрольную работу выполняли 18x учеников. Значит, получившие «отлично» составляют $\frac{1}{18}$ часть от всех, выполнявших работу. Возможны и другие решения: «по частям», с помощью графических иллюстраций и т.д.

Критерии оценки: Только верный ответ-1 балл. Верно составлено уравнение, дальнейшего продвижения нет – 2 балла. Арифметическая ошибка (одна) при решении уравнения – не более 5 баллов

3. Нейросеть «Маруся» перемножила два последовательных натуральных числа, меньшее из которых делится без остатка на 9. Из полученного результата она убрала все 2025 цифр в меньших разрядах (т.е. 2025 цифр справа), и получила некоторое число N. Может ли число N оканчиваться на 7? Если не может, то объясните почему. Если может, то приведите пример таких чисел и объясните, почему в числе, полученном «Марусей» после перемножения, 2026-я цифра справа – семёрка.

Ответ. Могла.

Решение. Например: $27\underbrace{00\ldots0}_{2025\ нулей}$ и $27\underbrace{00\ldots0}_{2025\ нулей}1$. Их произведение очевидно заканчивается на $7\underbrace{00\ldots0}_{2025\ нулей}$

Критерии оценки: Только верный ответ – 0 баллов. Любой верный пример, где очевидно, что 2026-я справа цифра это семёрка – 7 баллов. Пример, где неочевидно,что 2026-я справа цифра это семёрка – 0 баллов. Ни одно из двух последовательных чисел не делится на 9, но очевидно, что 2026-я справа цифра 7 – 3 балла.

4. В парламенте Остазии собрались 2024 депутата, каждый из которых либо рыцарь (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт). Каждый из депутатов сказал по одной фразе: Первый: «Второй депутат — лжец»;

Второй: «Третий депутат — лжец»;

….

2022-й: «2023-й депутат — лжец».

2023-й депутат: «2024-й депутат – рыцарь Порфирий».

2024-й депутат: «Я вовсе не Порфирий!»

Сколько лжецов в парламенте Остазии? Найдите все возможные ответы и докажите, что других нет.

Ответ: 1012.

Решение. Легко проверить, что если первый депутат рыцарь, то второй лжец, третий —рыцарь и т.д,, то есть все депутаты с четными номерами от 2 до 2022 лжецы, а все депутаты с нечетными номерами — рыцари. Но тогда 2024-й депутат должен быть Порфирием, а он, не будучи лжецом, отрицает это верное утверждение. Противоречие. Значит, первый депутат лжет. Тогда лгут все депутаты с нечетными номерами, а все депутаты с четными номерами со 2-го по 2022-й говорят правду. Поскольку 2023-й депутат лжет, 2024-й, отрицающий его слова, говорит правду, откуда и получаем ответ.

Критерии оценки: Только ответ: 0 баллов. Ответ с верным примером – 1 балл. Доказано чередование рыцарей и лжецов с 1 по 2022 депутата остального нет или неверно – 1 балл. Доказано чередование рыцарей и лжецов с 1 по 2022 + верный пример – 2 балла. Пропущен случай, когда первый депутат рыцарь, остальное верно – 4 балла. Просто рисунки со стрелочками без пояснений не являются доказательствами!

5. На бумажной доске 2024×2024, разделенной на квадратики 1×1, Андрей и Миша играют в следующую игру: по очереди каждый из них выбирает некоторый клетчатый квадрат (т.е. квадрат, составленный из квадратиков 1×1), все клетки которого не закрашены, и закрашивает его. Проигрывает тот, после хода которого на доске останется ровно одна незакрашенная клетка. Найдите, кто из них может гарантировать себе победу, независимо от ходов другого игрока, если начинает Андрей? Объясните, как победителю надо играть и почему он в этом случае победит. Первоначально все клетки доски незакрашены.

Ответ. Андрей.

Решение. Андрей закрашивает квадрат 2022×2022, оставляя каёмку исходного квадрата. Тогда далее игроки смогут закрашивать только квадраты 1×1. Поскольку в каёмке чётное число квадратиков, то квадрат останется после хода Миши.

Критерии оценки: Только ответ – 0 баллов. Приведены первый ход и верная стратегия, но не доказано, почему Андрей в этом случае выигрывает – 4 балла. Любая неверная стратегия или стратегия в которой не ясно, кто выиграет – 0 баллов. Приведен(ы) примеры игр, остального нет (т.е. автор работы играет сразу за обоих игроков) – 0 баллов.