ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2024-2025 УЧЕБНЫЙ ГОД

РЕСПУБЛИКА БАШКОРТОСТАН

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, Р.Н.Гарифуллин, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров

УФА - 2024

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.
4. Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

5. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.
6. Во время проверки работ 27.11.24 и 28.11.24 будет работать телеграмм-группа Муниципальные жюри математика 2024, ссылка https://web.telegram.org/a/#-4549927819 либо https://t.me/+3LI7ojv9VaxjMGNi

7 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критерий по баллам – также используются общие критерии.

1. Найдутся ли пять натуральных чисел, сумма которых равна 2026, а суммы цифр каждого из которых одинаковы?

   Ответ: да
   Решение. Например: 1001+1001+11+11+2=1001+1001+20+2+2.
   Критерии. Ответ «нет, не найдутся» - 0 баллов;
   Ответ «да, найдётся» без примера и без обоснования – 0 баллов;
   Любой правильный пример – 7 баллов.
   Рекомендации к проверке. Просьба проверять правильность ответов.

2. Ближе к концу четверти ученик Анатолий насчитал в своём дневнике одинаковое количество оценок «5», «4» и «3». Решив, что можно исправить несколько троек, подготовился и пересдал несколько из них на «4»(в дневнике вместо оценки «3» поставлены «4»). Новых оценок до конца четверти не появилось. В конце четверти количество оценок «3» и «5» вместе взятых оказалось 13, а оценок «4» и «5» вместе взятых – 23. Сколько всего оценок было к концу четверти?

   Ответ: 27 оценок.

   Решение: Рассмотрим изменение количества разных оценок после пересдачи и заметим, что общее количество оценок не поменялось. Во множестве оценок «3» и «5» некоторое количество перешло во множество оценок «4» и «5»(суммы оценок изменились). Следовательно, в сумме количеств оценок «3» и «5» и оценок «4» и «5» количество оценок «5» присутствует дважды, а сумма количеств новых оценок «3» и «4» не отличается от суммы первоначальных. Значит, в такой сумме в 4 раза больше оценок, чем оценок «5». Откуда (13+23)/4=9 оценок «5», а всего первоначально было 3·9=27 оценок.
   Решение 2. Решим задачу с помощью системы уравнений. Выберем, например, неизвестные: x – количество оценок «5», y – количество исправленных оценок «3». Тогда, количество оценок «3» после пересдачи

стало $(x-y)$, а количество оценок «4» соответственно $(x+y)$. Система уравнений выглядит так:

$$\begin{cases} x+(x-y)=13, \\ (x+y)+x=23. \end{cases}$$

Решая (возможно, разными способами), получим $x=9$, $y=5$. Откуда, количество оценок в журнале $3x=3\cdot 9=27$.

Критерии. Представлен неверный ответ, без обоснования – 0 баллов; Представлен верный ответ, без обоснования или обоснование неверное – 1 балл;
Верно найден ответ, есть несущественные ошибки в обосновании – 4-5 баллов;
При верном решении вместо ответа о количестве всех оценок представлен ответ о количестве оценок «5» (или «4» или «3») – снижаем на 1 балл;
Верно найден ответ, решение обосновано – 7 баллов.

3. Мама хочет приготовить торт из разноцветных коржей. Есть 5 коржей разного цвета: шоколадный, красный, медовый, зеленый, фиолетовый. Торт можно приготовить из всех пяти коржей, идущих в каком-то порядке снизу вверх. Сколькими способами можно приготовить торт, если красный корж может лежать только вторым или третьим по счёту сверху?

Ответ: 48 способов.

Решение: Рассмотрим все способы расположения всех коржей без красного: 4·3·2·1=24 способа, затем двумя способами расположить красный корж (на 2-е или 3-е место по счету), потому количество способов удвоится.
<u>Второе решение.</u> Рассмотрим количество способов составить торт из коржей в случае, если красный корж будет идти вторым: по правилу произведения 4·1·3·2·1=24 варианта. Теперь, если красный корж будет идти третьим: 4·3·1·2·1=24 варианта. Варианты в первом и во втором случае разные – общее количество всех вариантов 24+24=48 вариантов.

Критерии. Представлен неверный ответ, без обоснования – 0 баллов; Представлен верный ответ, без обоснования или обоснование неверное – 1-2 балла;
Верно найдено количество способов составления торта для одного случая расположения красного коржа (для 2-го или 3-го места) – 3 балла; Верно найден ответ, есть несущественные ошибки в обосновании – 4-5 баллов;
Верно найден ответ, решение обосновано – 7 баллов.

4. На доске написано 35 букв Э, 40 букв Ю, 45 букв Я. Разрешается стереть две разные буквы и написать третью. Такая операция проводится до тех пор, пока это возможно. Можно ли точно определить, какие две буквы были стёрты последними? Обоснуйте ответ.

   Ответ: последними будут однозначно стёрты буквы Э и Я.

   Решение: Заметим, что при достаточном количестве букв стирание двух и добавление третьей приводит к смене чётности количеств всех трёх букв, причём две буквы будут одной четности и третья – другой. Также, за одну операцию суммарно уменьшается количество всех букв на одну и меняется её четность. Тогда, если рассмотреть последнюю возможную операцию, то заметим, что на доске после этой операции должно остаться одна или несколько одинаковых букв. Но тогда останется та буква из трёх, чётность количества которой отличается от четности количества двух других. Такая буква – Э, следовательно, стёрты последними будут буквы Э и Я. Возможно, при доказательстве использовано понятие «инвариант»(или полуинвариант) – в решении требовать обоснование его использования(доказательство инвариантности при различных операциях стирания пар букв и дописывания третьей).

   Критерии. Представлен неверный ответ, без обоснования – 0 баллов; Представлен верный ответ, без обоснования (например, приведён частный пример ходов или опирается на них) или обоснование неверное – 0 баллов; В решении учащимся замечен инвариант или изменение четности числа разных букв после каждого хода (операции стирания пары букв и дописывания третьей), далее обоснование отсутствует или неверно – 2 балла; Верно найден ответ, есть несущественные ошибки в обосновании – 5-6 баллов;
   Верно найден ответ, решение полностью обосновано – 7 баллов. **Рекомендации к проверке.** Если в работе идёт перебор последовательностей вариантов ходов(особенно с пометками «правильные», «выгодные», «очевидные»), просьба критично подходить к их оценке. Чаще всего это опора на частные случаи и потеря общности, что ведёт к неполному обоснованию.

5. В Тридесятом царстве дороги соединяют города и сёла между собой. При этом каждый город связан дорогами ровно с 5 другими городами и ровно с 10 сёлами, а каждое село – с 9 городами и 6 другими сёлами. Чего в царстве больше – городов или сёл? Обоснуйте ответ.

   Ответ: сёл больше, чем городов.

Решение: Рассмотрим все дороги, соединяющие только города с сёлами. Выберем из них только по одной, соединяющие каждые два конкретных населённых пункта(уберём лишние маршруты – они не влияют на связность). Посчитаем количество таких дорог двумя способами: с одной стороны, таких дорог 10*Г, где Г – количество всех городов, а с другой, 9*С, где С – количество всех сёл. Отсюда, 10*Г=9*С, а значит, городов меньше, чем сёл. Решение второе. Рассмотрен двудольный граф, вершины-города в одной доле, вершины-сёла – в другой, ребра графа – дороги. Рассмотрим только рёбра графа, соединяющие вершины-города с вершинами-сёлами(если есть кратные – удаляем). Подсчитаем количество всех таких рёбер двумя способами – относительно городов 10*Г, где Г – количество всех городов, и относительно сёл 9*С, где С – количество всех сёл. Отсюда, 10*Г=9*С, а значит Г=0,9*С, т.е. городов меньше, чем сёл.

Критерии. Любой ответ без обоснования – 0 баллов; Представлен верный ответ, обоснование неверное (например, приведён частный пример расположения дорог, количества городов или сёл или опирается на такие случаи) – 0 баллов;
В решении замечено, что соотношение количества городов и сёл зависит только от количества дорог между ними(город-село, без повторных), далее обоснование отсутствует или неверно – 1 балл;
Верно найден ответ, есть несущественные ошибки в обосновании – 5-6 баллов;
Верно найден ответ, решение полностью обосновано – 7 баллов.
Рекомендации к проверке. Если в решении идёт перебор возможных связностей городов и сёл с помощью дорог, просьба критично подходить к их оценке. Чаще всего, это опора на частные случаи и потеря общности, что ведёт к неполному(неверному) обоснованию. Требуется оценка количества городов и сёл в общем случае. Оценка на частном случае – 0 баллов.

6. На острове Логичный живут ровно 100 жителей, причём каждый из них либо рыцарь, либо лжец и все знают об этом. Рыцарь всегда говорит правду, лжец всегда говорит ложь. Однажды на остров прибыл путешественник, который захотел узнать, сколько рыцарей среди его жителей. Он собрал всех жителей острова вместе и выслушал каждого по очереди. Первый сказал «Среди нас ровно один рыцарь», второй — «Количество рыцарей среди нас делится на 1», третий — «Среди нас ровно два рыцаря», четвертый — «Количество рыцарей среди нас делится на 2», …, 99-ый — «Среди нас ровно 50 рыцарей», 100-ый — «Количество рыцарей среди нас делится на 50». Сколько рыцарей могло быть среди жителей?

Ответ: 3 или 4.

Решение. Хотя бы один рыцарь среди жителей есть (второй сказал правду). Среди фраз «среди нас ровно n рыцарей» - не более одной верной. Пусть количество рыцарей N. Оценим количество правдивых/ложных фраз относительно делимости количества рыцарей. Заметим, что любой собственный делитель числа N не превосходит $N/2$. Значит, у числа N количество делителей не превосходит $N/2 + 1$, то есть правдивых фраз не более $N/2 + 2$. Количество правдивых фраз совпадает с числом N(количество рыцарей). Значит, $N/2 + 2 \geq N$, откуда $N \leq 4$. Переберём все возможные случаи.

Одного рыцаря быть не может, поскольку первые два утверждения будут истинны. Двух рыцарей быть не может, поскольку утверждения 2, 3 и 4 будут истинны. Три рыцаря могут быть, так как верны утверждения 2, 5, 6. Четыре рыцаря могут быть, так как верны утверждения 2, 4, 7 и 8. Итого, 3 или 4.

Критерии. Любой ответ без обоснования – 0 баллов;
Представлен верный ответ, обоснование неверное (например, приведён частный пример расположения дорог, количества городов или сёл или опирается на такие случаи) – 0 баллов;
Верно найден ответ, есть несущественные ошибки в обосновании – 5-6 баллов;
Верно найден ответ, решение полностью обосновано – 7 баллов.

Или

Следующие продвижения в работе суммируются:
В решении замечено и обосновано, что количество рыцарей не менее одного, далее обоснование отсутствует или неверно – 1 балл;
Сделана верная оценка максимального количества рыцарей ($N \leq 4$) – 2 балла;
Сделан полный разбор возможных случаев количества рыцарей(в том числе, с помощью оценки) – 3 балла;

Рекомендации к проверке. Возможно, при решении фраза «Среди нас ……» будет рассмотрена с учётом включения самого путешественника – учесть, что сам путешественник не рыцарь и не лжец, потому внимательно проверить все дальнейшие логические выкладки.
Решение предполагает перебор возможных вариантов количеств рыцарей или лжецов – требуется внимательно проверить все логические выкладки на соответствие друг другу.

8 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критерий по баллам – также используются общие критерии.

1. Найдите все пары чисел $(x; y)$, удовлетворяющих равенству

$$x^4 + 2x^2y + 2y^2 - 2xy + x^2 = 0.$$

Ответ. (0;0) и (-1;-1).

Решение. $x^4 + 2x^2y + 2y^2 - 2xy + x^2 = (x^2 + y)^2 + (y - x)^2$. Тогда уравнение выполняется только при одновременном равенстве $(x^2 + y)^2 = 0$ и $(y - x)^2 = 0$. Тогда $y = x, x^2 + x = 0$. Отсюда $x(x + 1) = 0$, $x = 0$ или $x = -1$, получаем две пары чисел (0;0) и (-1;-1).

Критерии проверки. Только угадан ответ – 0 баллов. Дан ответ и сделаны попытки обоснования отсутствия других вариантов – 1 балл. Выделены полные квадраты – 2 балла (не суммируется с предыдущим!). Сведено к системе двух уравнений – 3 балла.

2. Муж с женой поехали на машине в санаторий, намечая преодолеть весь путь с постоянной скоростью. Однако, проехав 1/3 дороги, они решили заправить машину, и пробыли на АЗС 10 минут. Продолжив движение, они увеличили скорость на 30% и надеялись успеть в санаторий даже раньше предполагаемого времени. Однако, отъехав от заправки на расстояние 1/12 всего пути, они вспомнили, что забыла там кошелек, вернулись обратно, забрали кошелек и тотчас же снова поехали в нужном направлении. В итоге им удалось приехать в санаторий точно в изначально намеченное время. Сколько всего времени они пробыли в пути от дома до санатория?

Ответ. 6,5 ч.

Решение. Обозначим рассточние от дома до санатория s км, изначальную скорость машины v км/ч. Тогда планировавшееся время поездки $\frac{s}{v}$ ч. До заправки проехали 1/3 пути, значит после нее 2/3 + 2·1/12 = 5/6 пути, так как пришлось дополнительно дважды проехать по 1/12. Тогда время после заправки составило $\frac{5/6 \cdot s}{1.3v} = \frac{5s}{7.8v} = \frac{25s}{39v}$ ч. С учетом простоя на заправке, получаем уравнение $\frac{s}{v} = \frac{s}{3v} + \frac{25s}{39v} + \frac{1}{6}$. Отсюда $\frac{2s}{3v} - \frac{25s}{39v} = \frac{1}{6}$; $\frac{s}{39v} = \frac{1}{6}$; $\frac{s}{v} = \frac{39}{6} =$

6.5 ч, что и составляет планировавшееся время поездки, соответствующее фактическому.

Критерии проверки. Не учтено, что 1/12 проехали дополнительно 2 раза либо не учтено время стоянки на заправке – не более 2 баллов. Уравнение составлено в любых обозначениях, решено не верно – 4 балла. Допущена одна арифметическая ошибка, все остальное верно – 5 баллов.

Замечание. Возможны решения в совершенно других обозначениях: принятием пути за 1, обозначением времени на проезд всего пути по изначальному плану и т.д. С ними надлежит разбираться так же тщательно, они могут быть как полностью верны так и полностью или частично не верны.

3. Существуют ли три последовательных натуральных числа, произведение которых на 2024 больше их суммы?

   Ответ. Нет.

   Решение. Обозначим среднее число n, тогда меньшее n–1, большее n+1. Запишем условие: $(n-1)\cdot n\cdot(n+1)=n-1+n+n+1+2024.$ Отсюда $n^3-n=3n+2024$; $n^3-4n=2024$; $(n-2)\cdot n\cdot(n+2)=2024.$ Данное равенство невозможно при натуральных n, поскольку мы имеем три последовательных числа одной четности: либо они все нечетные, но 2024 – четное, либо они все четные, но хотя бы одно из них делится не только на 2, но и на 4, и тогда их произведение делится на 16, а 2024 – нет.

   Замечание. Возможны другие обоснования отсутствия требуемого равенства: эти три числа имеют разные остатки от деления на 3, а значит одно из них делится на 3, а 2024 – нет, либо анализ возможных целых корней кубического уравнения. Решения в стиле «левая часть растет быстрее, чем правая, такое-то значение мало, а следующее – избыточно» оцениваются в 0 баллов, если не рассматривалась разность левой и правой частей и не доказывалось строго ее возрастание (инструментами, которыми владеют ученики 8 класса, это вряд ли достижимо).

   Критерии проверки. Только ответ – 0 баллов. Составлено верное кубическое уравнение, далее продвижений нет – 2 балла.

4. Пять девушек-математиков решили сравнить гардеробы. Оказалось, что платьев у любых двух девушек не поровну, но их количества отличаются в целое число раз. Девушки договорились, что если у каких-то двоих отношение количеств платьев окажется числом простым, то девушка, у которой платьев больше, дарит утюг той, у которой их меньше (одна

девушка может и подарить, и получить в подарок несколько утюгов). Сколько утюгов всего могло быть подарено?

Ответ. 0; 1; 2; 3; 4.

Решение. Разделим его на две части: «начало» и «продолжение».

1 способ начала. Рассмотрим полный граф на 5 вершинах, в которых запишем количества платьев у девушек, а на ребрах – их отношения. Максимально возможная нециклическая цепочка в нем имеет длину 4, именно такая степень простого множителя и может «накопиться» при переходе от меньших чисел к большим по ребрам. Любой цикл будет содержать ребро, на котором записано отношение, являющееся составным числом, так как оно равно произведению отношений по остальным ребрам этого цикла.

2 способ начала. Так как для любых двух девушек число платьев различно, все эти числа различны. Выберем наименьшее. Будем двигаться от него по возрастанию к наибольшему, максимальный по длине маршрут будет из 4 звеньев, которые могут давать отношение – простое число.

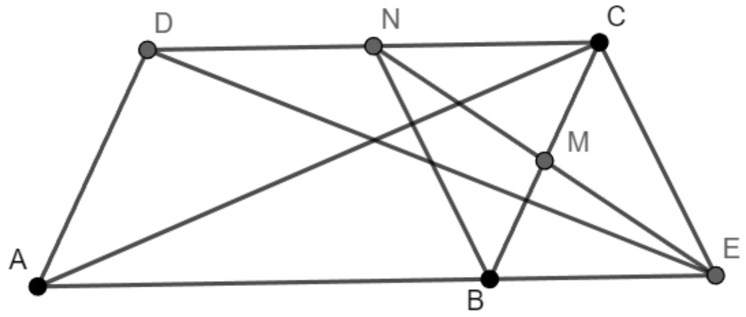
Продолжение. Два различных простых множителя использоваться не может, так как тогда отношение полученных с их помощью чисел не будет натуральным числом. Цепочка из звеньев с простыми числами может оказаться и короче, в том числе ее может вообще не быть.

Таким образом, возможны значения 0;1;2;3;4.

Примеры: 4: 1,2,4,8,16; 3: 1,2,4,8,32; 2: 1,2,4,16,64; 1: 1,2,8,32,128; 0: 1,4,16,64,256. Разумеется, примеров бесконечное множество.

Критерии проверки. Определено и обосновано наибольшее значение, никаких примеров нет – 3 балла. Приведен пример для наибольшего значения – 1 балл (суммируется с предыдущим). Указаны все возможные значения, примеры не приведены – 4 балла. Приведены не все примеры, обосновано наибольшее значение и указаны все возможные значения – 5 баллов. Все сделано, потеряно только значение 0 – 5 баллов. Все сделано, обоснование есть, но недостаточно – 6 баллов.

5. В параллелограмме ABCD отмечены точки M и N, служащие серединами сторон BC и CD соответственно, а на продолжении отрезка MN за точку M – точка E. При этом оказалось, что EM = MN, BN = BC. Докажите, что и AC = ED.



Решение.

Точка M является серединой отрезков BC и NE, поэтому BNEC – параллелограмм, отсюда BN = CE, а значит CE = BC = AD. Кроме того, BE параллельно NC, а значит точка E лежит на прямой AB. В силу сказанного ADCE является равнобокой трапецией, и тогда ее диагонали DE и AC равны.

Критерии проверки. Обосновано, что точка E лежит на прямой AB 2 балла, используется без обоснования – снимать 2 балла. Получено, что CE = AD – 2 балла. Получено и первое и второе, но не указано, что это равнобокая трапеция – 5 баллов. Сделано все, кроме последнего шага (равенства диагоналей равнобокой трапеции) – 6 баллов.

6. Найдите количество 2024-значных натуральных чисел, десятичная запись которых содержит хотя бы одну цифру 7 и хотя бы одну цифру 8.

Ответ. $9 \cdot 10^{2023}$+$6 \cdot 8^{2023}$ – $16 \cdot 9^{2023}$.

Решение. Введем обозначения и произведем подсчет, воспользовавшись во всех случаем правилом произведения для последовательного независимого выбора. Всего количество 2024-значных натуральных чисел A = $9 \cdot 10^{2023}$, из них не содержащих ни 7, ни 8 будет B = $7 \cdot 8^{2023}$, а не содержащих одной из цифр 7 или 8 по C = $8 \cdot 9^{2023}$. (Везде первым множителем стоит количество вариантов для первой цифры числа, оно на 1 меньше, чем для остальных, поскольку первой цифрой не может быть 0.) Тогда содержащих одну из цифр 7 и 8 и не содержащих другую будет разность C – B, содержащих хотя бы одну из этих цифр будет A – B, отсюда нужно исключить количество чисел, в которых присутствует только одна из двух интересующих нас цифр, и тогда искомое количество выражается как A – B – 2·(C – B) = A + B – 2C = = $9 \cdot 10^{2023}$+$7 \cdot 8^{2023}$ – $16 \cdot 9^{2023}$.

Критерии проверки. Верно подсчитаны отдельные элементы из A, B, C с указанием их смысла – 1 или 2 балла. Составлена верная схема вычислений, возможно, с привлечением операций над множествами, подсчетов нет или они неверны – 4 балла. Только одна ошибка в преобразованиях, остальное верно – 5 баллов.

9 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критерий по баллам – также используются общие критерии.

1. Алиса оказалась в стране чудес и встретила Чеширского Кота, который предложил ей сыграть в загадочную игру. У Алисы есть мешочек с монетками. Если монеток чётное число, Алиса должна отдать половину коту. Если нечётное – кот добавляет ей ещё 5 монеток. Игра продолжается до тех пор, пока у Алисы не останется всего одна монетка. Алиса не может отказать Чеширскому Коту и не сыграть с ним в его игру, но в тоже время Алисе нужно спешить на завтрак к Белому кролику. Помогите Алисе определить, при каких начальных количествах монеток игра завершится через конечное количество ходов.

Ответ: все натуральные числа, не кратные 5.

Решение. Проследим, как будут меняться числа от 2 до 10:

$$2 \to 1, \quad 3 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1, \quad 4 \to 2 \to 1, \quad 5 \to 10 \to 5 \to 10 \to \cdots$$

$$6 \to 3 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1, \quad 7 \to 12 \to 6 \to 3 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1,$$

$$8 \to 4 \to 2 \to 1, \quad 9 \to 14 \to 12 \to 6 \to 3 \to 8 \to 4 \to 2 \to 1,$$
$$10 \to 5 \to 10 \to \cdots$$

Заметим, что все эти числа, кроме 5 и 10, за конечное число шагов перейдут в 1. Если же первоначально у Алисы 5 или 10 монеток, то игра будет бесконечной, зациклившись на последовательности $5 \to 10 \to 5 \to \cdots$ или $10 \to 5 \to 10 \to \cdots$.

Рассмотрим числа, большие 10. Заметим, что после операции с нечетным числом мы всегда получаем число четное: $2k+1 \to 2k+6$.

Покажем, что за 2 операции любое число, большее 5, уменьшается на натуральное число.

Пусть $n = 2k$ – четное. Тогда $n \to k$ после первой операции, и, если k – четное, мы вновь разделим число на 2, после чего исходное число монеток уменьшится в 4 раза. Если же k - нечетное, то $n = 2k \to k \to k+5,\ k+5 < 2k, k > 5$.

Пусть $n = 2k-1, k > 5$: $n \to 2k+4 \to k+2,\ k+2 < 2k-1,\ k > 3$.

Таким образом, за конечное число шагов любое исходное число монеток перейдет в число от 1 до 10 включительно.

Рассмотрим отдельно числа, кратные 5. Покажем, что такие числа всегда будут превращаться в числа, так же кратные 5.

Пусть $n = 5(2k-1) -$ нечетное число, кратное 5, $k > 2$:

$$5(2k-1) \to 5(2k-1) + 5 = 10k \to 5k.$$

Пусть $n = 5(2k) -$ четное число, кратное 5, $k > 2$: $5(2k) \to 5k$.

Следовательно, число 1 можно получить из всех натуральных чисел, не кратных 5.

Критерии. Только ответ - 0 баллов.

Верно разобраны случаи для числа исходных монеток от 1 до 10, но не доказано, что число монеток убывает каждые 2 операции : не более 1 балла.

Не обосновано, что числа, кратные 5, переходят в числа кратные 5: минус 2 балла.

Вычислительная ошибка: минус 3 балла.

2. Для уравнения

$$x^2 - 2027^{2025}x + 2025^{2027} = 0$$

выясните, имеет ли оно целый корень. Если целый корень есть, найдите его, если целых корней нет - докажите это.

Ответ: целых решений нет.

Решение. Предположим, что $x = n -$ целое решение уравнения. Тогда верно:

$$n^2 - 2027^{2025}n + 2025^{2027} = 0, \qquad n(n - 2027^{2025}) = -2025^{2027}.$$

Из последнего равенства следует, что n - делитель числа $-2025 = -5^2 \cdot 3^4$, а значит, n нечетно. Но тогда $n - 2027^{2025} -$ четное и в левой части последнего соотношения – четное число, в правой – нечетное. Противоречие.

Критерии. Только ответ - 0 баллов. Доказано, что если корни есть, то они являются делителями числа-2025^{2027} (возможно, с использованием теоремы Виета), дальнейшие верные рассуждения отсутствуют – не более 3 баллов.

3. Семеро друзей обсуждают, как провести вместе выходные. У них есть три варианта - поездка в горы, квест и пейнтбол. Они решили бросить жребий по следующему правилу: каждый из друзей случайным образом выбирает один из трех вариантов. Затем все голоса подсчитываются. Вариант считается принятым, если его выбрали более 50% человек. Найти вероятность того, что один из вариантов будет принятым.

Ответ: 5/6**.**

Решение 1. Подсчитаем сначала число вариантов распределения голосов. Пусть за поездку в горы было отдано x голосов, за квест y, а за пейнтбол z голосов. Причем $x + y + z = 7$ и x, y, z - целые числа от 0 до 7. Число решений этого уравнения можно найти как число сочетаний $C_9^2 = 36$ (в самом деле, число решений может быть найдено как число способов расставить 2 знака + между 7 единицами, при этом знаки + могут идти подряд, в том числе перед первой единицей, либо после последней единицы).

Можно найти число решений полным перебором:

Число 7 может быть представлено как сумма следующим образом:

7=0+0+7=0+7+0=7+0+0 (3 варианта), 7=0+1+6 (6 вариантов), 7=0+2+5 (6 вариантов), 7=0+3+4 (6 вариантов), 7=1+1+5 (3 варианта), 7=1+2+4 (6 вариантов), 7=1+3+3 (3 варианта), 7=2+2+3 (3 варианта), итого 36.

Найдем далее число случаев, когда один из вариантов побеждает. Для этого необходимо и достаточно, чтобы $x + y + z = 7$ и $x > 3$ или $y > 3$ или $z > 3$.

Рассмотрим варианты, когда будет выбрана поездка в горы:

$x = 7,\ y + z = 0;\ x = 6,\ y + z = 1;\ x = 5,\ y + z = 2;\ x = 4,\ y + z = 3;$

Подсчитаем число решений в каждом из случаев и затем сложим: 1+2+3+4=10. Аналогично рассмотрим варианты победы двух других вариантов. Их общее число 3*10=30. Искомая вероятность равна P=30/36=5/6.

Решение 2. Пусть событие A = «Один из вариантов победил в голосовании». Рассмотрим противоположное событие: $\bar{A}$ = «Ни один из вариантов не победил в голосовании». Найдем вероятность этого события. Всего голоса могут распределиться 36 способами (см.решение 1). Ни один из вариантов не набирает нужного числа голосов, если каждый из вариантов набирает не более трех голосов. Это возможно, когда два варианта набрали по 3 голоса, а один набрал 1 голос, либо два варианта набрали по 2 голоса, а один – 3 голоса. Всего таких случаев 6. Значит вероятность $P(\bar{A}) = \frac{6}{36} = 1/6$, откуда $P(A) = \frac{5}{6}$.

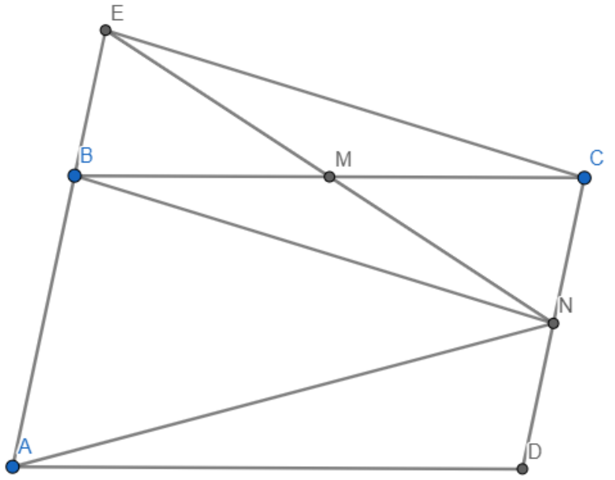
Критерии. Только ответ - 0 баллов.

Верно подсчитан числитель, но в при подсчете знаменателя - ошибки, либо наоборот – не более 3 баллов.

Обосновано и верно найдена вероятность противоположного события, но исходное событие «забыли» найти: 6 баллов.

4. В параллелограмме ABCD отмечены точки M и N - середины сторон BC и CD соответственно, на продолжении отрезка MN за точку M отмечена точка E. При этом оказалось, что EM = MN, BN = BC. Докажите, что EN=AN.

Решение.



1) $\Delta BEM = \Delta CNM,$ откуда $BE||DC, BECN -$ параллелограмм, точки B,E,A лежат на одной прямой.
2) $AD = BC = BN = EC$, откуда $AECD$ – равнобедренная трапеция,
3) $\Delta ECN = \Delta ADN$ $(CE = DA, CN = DN,\ \angle ECN = \angle ADN)$, откуда $EN = AN$.

Критерии. Доказано только, что $BECN -$ параллелограмм – 3 балла. Доказано, что $BECN -$ параллелограмм и $AECD$ – равнобедренная трапеция: 5 баллов.

5. На столе лежит *2n* шаров, где *n*- натуральное число, большее 1. В каждый из *2n* шаров написали какое-то число. Для любого разбиения шаров на *n* пар верно, что найдутся две пары с одинаковой суммой. Докажите, что существует хотя бы четыре шара с одинаковыми числами.

Ответ. Четыре шара с одинаковыми числами всегда найдутся.

Решение. Занумеруем все шары по величине записанных там чисел порядке возрастания

$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \cdots \le a_n \le \cdots \le a_{2n}$.

Образуем пары по порядку: первый шар со вторым, третий с четвертым и так далее. Получим такие суммы:

$$S_1 = a_1 + a_2, \qquad S_2 = a_3 + a_4, \qquad \ldots, S_n = a_{2n-1} + a_{2n}.$$

Очевидно, что верны неравенства $S_1 \le S_2 \le S_3 \le \cdots \le S_n$. Но по условию, в каждом разбиении на пары есть как минимум две равные суммы. Заметим, что среди этих равных сумм всегда есть две соседние, например $S_k = S_{k+1}$. Но, т.к. $a_{2k-1} \le a_{2k} \le a_{2k+1},\ a_{2k} \le a_{2k+1} \le a_{2k+2},$ это возможно, только если $a_{2k-1} = a_{2k} = a_{2k+1} = a_{2k+2}$.

Критерии. Только ответ - 0 баллов.

В решении есть идея упорядоченности, но вывод из нее не сделан– не более 2 баллов.

6. Докажите, что неравенство
$a^3+b^3+c^3+3abc \geq a^2b+b^2c+c^2a+a^2c+b^2a+c^2b$

справедливо для любых неотрицательных чисел a, b, c.

Решение. Перенесем все слагаемые в левую часть и сгруппируем:

$(a^3-a^2b)+(b^3-b^2c)+(c^3-c^2a)+(abc-a^2c)+(abc-b^2a)+(abc-c^2b) \geq 0.$

Далее вынесем общие множители за скобки:

$$a^2(a-b)+b^2(b-c)+c^2(c-a)+ac(b-a)+ab(c-b)+cb(a-c)) \geq 0,$$

$$(a-b)(a^2-ac)+(b-c)(b^2-ab)+(c-a)(c^2-cb) \geq 0,$$

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

$$(a-b)(a(a-c)-b(b-c))+c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

Без ограничения общности можно считать, что $a \geq b \geq c$, тогда $c(c-a)(c-b) \geq 0$.

Т.к. $a \geq b$, то $a-b \geq 0, a-c \geq b-c$ и $a(a-c)-b(b-c) \geq 0$, откуда и следует справедливость последнего, а значит и исходного неравенства.

Критерии. Только ответ - 0 баллов.

Получено одно из неравенств ниже, дальнейшего продвижения нет: 2 балла.

$$(a-b)(a^2-ac)+(b-c)(b^2-ab)+(c-a)(c^2-cb) \geq 0,$$

$$a(a-b)(a-c)+b(b-c)(b-a)+c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

Получено неравенство ниже, дальнейшего продвижения нет: 3 балла.

$$(a-b)(a(a-c)-b(b-c))+c(c-a)(c-b) \geq 0,$$

В решении есть идея об упорядоченности чисел a, b, c, но продвижений дальнейших нет: 1 балл.

10 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критерий по баллам – также используются общие критерии.

Задача 1. Найдите все натуральные n такие, что $n + S(n) = 2025$, где $S(n)$ – сумма цифр числа n.

Решение: Если $n < 1000$, то $n + S(n) < 1000 + 9 * 3 = 1027$. Значит n состоит из 4 цифр, пусть $n = 1000a + 100b + 10c + d$, где a, b, c, d –цифры, a не равно 0. Получаем уравнение: $1001a + 101b + 11c + 2d = 2025$.

Возможно 2 варианта $a = 1$ или $a = 2$.

В первом случае: $101b + 11c + 2d = 1024$, при $b < 9$ решений нет, при $b = 9$ получаем: $11c + 2d = 115$, чтобы $115 - 2d$ делились на 11 есть только 1 вариант $d = 8$. Получили решение 1998.

Во втором случае $101b + 11c + 2d = 23$, видим что $c = 0$, получаем $11c + 2d = 23$, единственное решение $c = 1, d = 6$. Получили решение 2016.

Ответ: 1998, 2016.

Критерии.

1 балл за каждый найденный ответ
5 баллов за доказательство, что других ответов нет
3 балла, если не рассмотрен случай, что 1 на первом месте
7 баллов за полное решение.

Задача 2. Найдите все действительные корни уравнения

$$(x - 2024)^4 + (x - 2025)^2 = 1$$

Решение. Обозначим $t = x - 2024$, тогда для t получим уравнение $t^4 + (t - 1)^2 - 1 = 0$. Разложим левую часть уравнения на множители : $(t - 1)(t - 1 + t^3 + t^2 + 1) = (t - 1)t(t^2 + t + 1) = 0$. Поскольку $t^2 + t + 1 = 0$ действительных корней не имеет, остается $t = 0$ или $t = 1$. Таким образом, $x = 2024$ или $x = 2025$.

Ответ. 2024, 2025.

Критерии.

1 балл – приведен верный ответ без обоснования;

4 балла – получено разложение на множители;

7 баллов –приведено полное решение.

Задача 3. После товарищеского матча по футболу две команды (каждая из которых состоит из 18 игроков, включая 2 вратарей и запасных игроков) решили поехать на озеро искупаться. Им предоставили два автобуса вместимостью 18 человек каждый. Игроки двух команд расселись в эти два автобуса случайным образом. Найти вероятность, что в каждом из автобусов есть хотя бы один вратарь.

Решение. Отрицания этого события – все вратари сидят в одном автобусе. Найдем число способов такой посадки. Первого вратаря можно посадить на любое из 36 мест, тогда второго на любое из 17 оставшихся мест в том же автобусе, третьего на любое из 16 мест, четвертого на любое из 15 мест, остальные 32 игрока могут рассаживаться произвольным образов – всего 32! вариантов. Общее число способов рассадки 36 игроков равно 36!. Значит, искомая вероятность равна

$$P = 1 - \frac{36 * 17 * 16 * 15 * 32!}{36!} = 1 - \frac{17 * 16 * 15}{35 * 34 * 33} = 1 - \frac{8}{77} = \frac{69}{77}$$

Ответ. $\frac{69}{77}$

Критерии.

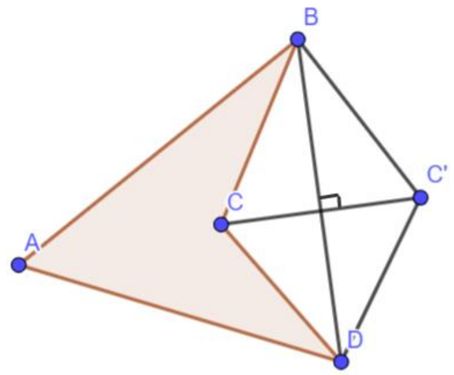
1 балл сформулировано отрицание этого события

1 балл – найдено общее количество рассадок всех игроков,

4 балла – найдено количество рассадок, при которых 4 вратаря сидят в одном автобусе,

7 баллов за полное решение

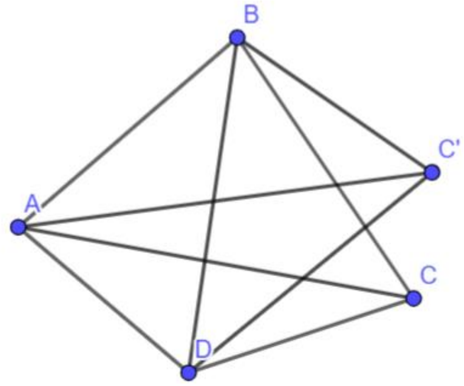
Задача 4. Для произвольного четырехугольника $ABCD$ докажите, что его площадь S удовлетворяет неравенству $4S \leq (AB + BC)(CD + DA)$.



Решение. Если четырехугольник невыпуклый, то можно отобразить вершину относительно внешней диагонали. При этом площадь увеличится, а длины сторон останутся теми же.

Поэтому утверждение достаточно доказать для выпуклых четырехугольников. Для него имеем первое неравенство

$2S = 2S_{ABD} + 2S_{BCD} = AB \cdot AD \sin A + CB \cdot CD \cdot \sin C \leq AB \cdot AD + CB \cdot CD$. Построим точку C' – образ точки C относительно серединного перпендикуляра к BD, тогда $BC' = CD, DC' = BC$. Получаем второе неравенство



$$2S = 2S_{ABC'D} = AB \cdot BC' \cdot \sin B + C'D \cdot DA \cdot \sin D \leq AB \cdot CD + CB \cdot DA.$$

Сложив неравенства, получим

$$4S \leq AB \cdot AD + CB \cdot CD + AB \cdot CD + CB \cdot DA = (AB + BC) \cdot (CD + DA)$$

Критерии.

1 балла – задача сведена к выпуклым четырехугольникам,

2 балла – за первое неравенство о площадях,

4 балла – за второе неравенство о площадях,

7 баллов за полное решение.

Задача 5. На плоскости прямолинейно с постоянными (не обязательно равными) скоростями движутся три точки. В некоторый момент времени они не находились на одной прямой. Могут ли после этого все три точки выстроиться вдоль каких-либо прямых более двух раз?

Решение.

Обозначим эти точки A, B и C. Предположим, что точки A, B, C могут оказаться на одной прямой более 2 раз. Рассмотрим декартову систему координат с началом в подвижной точке A. В этой системе координат точки B и C движутся равномерно и прямолинейно. Уравнение траектории точки B: $\begin{cases} x_B = k_B t + l_B \\ y_B = m_B t + n_B \end{cases}$,

C: $\begin{cases} x_C = k_C t + l_C \\ y_B = m_C t + n_C \end{cases}$. Условие, что точки A, B и C окажутся на одной прямой :

$\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{AC}$, в координатной записи $\frac{x_B - 0}{y_B - 0} = \frac{x_C - 0}{y_C - 0}$.

То есть $\frac{k_B t + l_B}{m_B t + n_B} = \frac{k_C t + l_C}{m_C t + n_C}$. Это равенство представляет собой либо уравнение степени не больше двух либо выполнено тождественно. Поскольку в начальный момент времени A, B и C не находились на одной прямой, то второй вариант не реализуется. Значит, уравнение имеет не более двух корней.

Критерии.

1 балл - выписаны уравнения движения точек A, B и C;

2 балла – выбрана подвижная система координат и выписаны в этой системе уравнения движения двух точек;

3 балла – сформулировано условие, что три точки окажутся на одной прямой;

5 – задача сведена к анализу количества решений квадратного уравнения;

7 баллов за полное решение.

Задача 6. Последовательность $a_n, n \geq 0$\$ задана условиями $a_0 = 0$, $a_{n+1} = ka_n + \sqrt{(k^2-1)a_n^2 + 2025}, n \geq 0$, где k некоторое натуральное число. Доказать, что все члены последовательности целые, а члены с четными номерами делятся на $2k$.

Решение. Видим, что $a_{n+1} > ka_n > a_n$, следовательно последовательность монотонно возрастает. Возведем в квадрат равенство $a_{n+1} - ka_n = \sqrt{(k^2-1)a_n^2 + 2025}$, после упрощений получим

$a_{n+1}^2 - 2ka_{n+1}a_n + a_n^2 - 2025 = 0,$

в следующей точке имеет

$$a_{n+2}^2 - 2ka_{n+1}a_{n+2} + a_{n+1}^2 - 2025 = 0.$$

Вычтем из второго выражения первое, получим

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 - 2ka_{n+1}a_{n+2} + 2ka_{n+1}a_n =$$

$= (a_{n+2} - a_n)(a_{n+2} + a_n - 2ka_{n+1}) = 0.$

Так как a_n строго монотонно возрастающая, то $a_{n+2} - a_n > 0$ и следовательно

$a_{n+2} = 2ka_{n+1} - a_n$ (1)

Поскольку $a_n = 0$, $a_1 = 45$ (найдено из исходного выражения), то в силу формулы (1) получим, что a_n -натуральные числа. Более того из формулы (1) следует, что $a_{n+2} + a_n$ ⋮2k и так как $a_0 = 0$, то и все четные члены будут кратны $2k$

4 балла за доказательство натуральности всех чисел,

3 балла – за доказательство делимости четных членов на $2k$,

-1 балл, если не сформулирована, но использована монотонность последовательности (например, поделили на $a_{n+2} - a_n$),

3 балла – получена формула (1),

7 баллов за полное решение.

11 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критерий по баллам – также используются общие критерии.

Задача 1. Найдите все натуральные n такие, что n+2S(n)=2025, где S(n) –сумма цифр числа n.

Решение: Если n<1000, то n+2S(n)<1000+2*9*3=1054. Значит n состоит из 4 цифр, пусть n=1000a+100b+10c+d, где a,b,c,d –цифры, a не равно 0. Получаем уравнение: $1002a + 102b + 12c + 3d = 2025$, поделим на 3 получим: $334a + 34b + 4c + d = 675$

Возможно 2 варианта a=1 или a=2.

В первом случае: 34b+4c+d=341, при b<9 решений нет, при b=9 получаем: 4c+d=35, чтобы 35-d делились на 4 есть два варианта 3 и 7. Получили 2 решения 1977, 1983.

Во втором случае 34b+4c+d=7, видим что b=0, получаем 4c+d=7, имеет 2 решения c=0,d=7 и c=1,d=3. Получили решения 2007, 2013.

Ответ: 1977, 1983, 2007, 2013

Критерии.

1 балл за каждую пару найденных ответов

5 баллов за доказательство, что других ответов нет

3 балла, если не рассмотрен случай, что 1 на первом месте

7 баллов за полное решение

Задача 2. После товарищеского матча по футболу две команды (каждая из которых состоит из 18 игроков, включая 2 вратарей и запасных игроков) решили поехать на озеро искупаться. Им предоставили два автобуса вместимостью 18 человек каждый. Игроки двух команд расселись в эти два автобуса случайным образом. Найдите вероятность того, что в каждом из автобусов оказалось ровно по 2 вратаря.

Решение. Найдем число способов рассадки 4 вратарей в автобусы. Первый вратарь может сесть на любое из 36 мест. Второй вратарь на любое из оставшихся 35 мест, но если он сел на одно из 17 мест в автобусе с первым вратарем, то 3ий и

4ый вратарь должны садится в другой автобус – для этого 18*17 вариантов. Если второй вратарь сел в другой автобус то для третьего есть 34 варианта, а для четвертого всего 17. Получили $36*(17*18*17+18*34*17)$ вариантов посадки вратарей. Остальных игроков можно посадить 32! способами. Всего вариантов посадить 36 игроков – 36!. Вероятность равна $P = \frac{36*(17*18*17+18*34*17)32!}{36!} = \frac{17*18*17+18*34*17}{35*34*33} = \frac{153}{385}$.

Ответ: $\frac{153}{385}$.

Критерии.

1 балл – найдено общее количество рассадок всех игроков,

5 балла – найдено количество рассадок, при которых по 2 вратаря сидят в каждом автобусе,

7 баллов за полное решение

Задача 3. Задан многочлен $P(x) = x^2 - a$, при всех a найти многочлен $Q(x)$ 4-й степени, коммутирующий с $P(x)$, т.е. такой что $P(Q(x)) = Q(P(x))$ при всех x.

Решение. Пусть $Q(x) = bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f$, тогда $P\big(Q(x)\big) = (bx^4 + \cdots)^2 - a = b^2x^8 + \cdots, Q\big(P(x)\big) = b(x^2 - a)^4 + \cdots = bx^8 + \cdots$, здесь через многоточие обозначены слагаемые с младшими степенями видим, что $b = 1$.

Для 7 степени имеем: $P\big(Q(x)\big) = (x^4 + cx^3 + \cdots)^2 - a = x^8 + 2cx^7 + \cdots, Q\big(P(x)\big) = (x^2 - a)^4 + c(x^2 - a)^3 \ldots = bx^8 + 0x^7 + \cdots$, поэтому с=0.

Для 6 степени получим: $P\big(Q(x)\big) = (x^4 + dx^2 + \cdots)^2 - a = x^8 + 2dx^6 + \cdots, Q\big(P(x)\big) = (x^2 - a)^4 + d(x^2 - a)^2 \ldots = bx^8 - 4ax^6 + \cdots$, значит $d = -2a$.

Для 5 степени $P\big(Q(x)\big) = (x^4 - 2ax^2 + ex + f)^2 - a = x^8 - 4ax^6 + 2ex + \cdots, Q\big(P(x)\big) = (x^2 - a)^4 - 2a(x^2 - a)^2 \ldots = bx^8 - 4ax^6 + 0x^5 + \cdots$, значит $e = 0$.

Далее для 4 степени $P\big(Q(x)\big) = (x^4 - 2ax^2 + f)^2 - a = x^8 - 4ax^6 + (4a^2 + 2f)x^4 + \cdots, Q\big(P(x)\big) = (x^2 - a)^4 - 2a(x^2 - a)^2 + f = bx^8 - 4ax^6 + (6a^2 - 2a)x^4 + \cdots$, значит $f = a^2 - a$.

Получили $Q(x) = x^4 - 2ax^2 + a^2 - a = (x^2 - a)^2 - a$, так как оказалось, что Q(x)=P(P(x)), то остальные степени проверять не требуется.

Критерии.

1 балл – за нахождения каждого из коэффициентов $Q(x)$,

2 балла показано, что получившийся полином удовлетворяет требуемому условию,

2 балла за угаданный ответ,

7 баллов за полное решение

Задача 4. В пространстве прямолинейно с постоянными (не обязательно равными) скоростями движутся три точки. В некоторый момент времени они не находились на одной прямой. Могут ли они после этого оказаться на одной прямой более двух раз?

Решение. Обозначим эти точки A, B и C. Предположим, что точки A, B, C могут оказаться на одной прямой более 2 раз. Тогда существует плоскость в которой проходит все движение. Рассмотрим декартову систему координат с началом в подвижной точке A, оси которой лежат в этой плоскости. В этой системе координат точки B и C движутся равномерно и прямолинейно. Уравнение траектории точки B: $\begin{cases} x_B = k_B t + l_B \\ y_B = m_B t + n_B \end{cases}$,

C: $\begin{cases} x_C = k_C t + l_C \\ y_B = m_C t + n_C \end{cases}$. Условие, что точки A, B и C окажутся на одной прямой:

$\overrightarrow{AB} \,||\, \overrightarrow{AC}$, в координатной записи $\frac{x_B - 0}{y_B - 0} = \frac{x_C - 0}{y_C - 0}$.

То есть $\frac{k_B t + l_B}{m_B t + n_B} = \frac{k_C t + l_C}{m_C t + n_C}$. Это равенство представляет собой либо уравнение степени не больше двух либо выполнено тождественно. Поскольку в начальный момент времени A, B и C не находились на одной прямой, то второй вариант не реализуется. Значит, уравнение имеет не более двух корней.

Критерии.

2 балла – выбрана подвижная система координат и выписаны в этой системе уравнения движения двух точек;

3 балла – сформулировано условие, что три точки окажутся на одной прямой;

5 балла – задача сведена к анализу количества решений квадратного уравнения;

7 баллов за полное решение.

Задача 5. Дан правильный тетраэдр с ребром 1. Найдите наибольшую площадь его ортогональной (перпендикулярной) проекции на некоторую плоскость.

Решение. Пусть A', B', C', D' – ортогональные проекции вершин A, B, C, D тетраэдра. Рассмотрим два случая. Проекция тетраэдра ABCD может быть выпуклым четырёхугольником с вершинами A', B', C', D' или треугольником (если, например, точка D' находится внутри треугольника $A'B'C'$). В каждом из этих случаев найдем максимально возможную площадь проекции. Пусть проекцией пирамиды является треугольник $A'B'C'$. В этом случае, $S_{A'B'C'}$ =

$S_{ABC}\, cos(\alpha)$, где α – угол между плоскостями $A'B'C'$ и ABC. Тогда наибольшая площадь достигается при α=0 и равна $S_{A'B'C'} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Пусть проекция пирамиды – четырёхугольник (например, $A'B'C'D'$). Обозначим K, L, M, N середины ребер AB, BC, CD, DA, тогда K', L', M', N' – проекции этих точек являются серединами сторон A'B', B'C', C'D', D'A'. Заметим, что *KLMN – параллелограмм*, стороны которого параллельны ребрам *AC* и *BD*, следовательно K'L'M'N' тоже параллелограмм и |K'L'|=|M'N'|=|A'C'|/2. Выразим $S_{A'B'C'D'}$ через $S_{K'L'M'N'}$. Имеем, $S_{A'B'C'D'} = (|A'C'|\, h_1 + |A'C'|\, h_2)/2$, где h_1 и h_2 –высоты, опущенные из вершин B' и D' на A'C'. Тогда $h=(h_1 + h_2)/2$ равна высоте параллелограмма K'L'M'N' и $S_{K'L'M'N'} =|K'L'|h=(|A'C'|\, h_1 + |A'C'|\, h_2)/2= S_{A'B'C'D'}/2$. Следовательно, площадь проекции $S_{A'B'C'D'} = 2S_{KLMN} \cos(\alpha)$, где α– угол между плоскостью *KLMN* и плоскостью проекции. Максимальная площадь проекции достигается при α=0, то есть когда плоскость параллельна скрещивающимся ребрам *AC* и *BD*. Очевидно, что $S_{A'B'C'D'} = 2S_{KLMN} = AC \cdot BD=1$, и это больше, чем было получено для случая треугольника. Таким образом, максимально возможная площадь проекции равна 1.

Критерии.

1-2 балла – верный ответ, обоснование отсутствует;

2 балла – найдена и обоснована максимальная площадь для случая треугольной проекции;

4 балла – показано, что во втором случае максимальная площадь проекции тетраэдра достигается когда плоскость параллельна скрещивающимся ребрам;

7- полное решение.

Задача 6. Найдите уравнение третьей степени с целыми коэффициентами, которое имеет корни $\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{4\pi}{7}, \cos\frac{8\pi}{7}$ (требуется явно найти коэффициенты уравнения).

Решение. Способ 1. Обозначим $\alpha = \frac{2\pi}{7}$. По теореме Виета для кубического уравнения $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ имеем

$$\begin{aligned}-a &= \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{8\pi}{7} \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right) \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7} \\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{10\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{12\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\right) \\ &= \cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{8\pi}{7}=-\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

так как $\cos\frac{6\pi}{7}=\cos\frac{8\pi}{7}$, $\cos\frac{12\pi}{7}=\cos\frac{2\pi}{7}$, $\cos\frac{10\pi}{7}=\cos\frac{4\pi}{7}$,

$$-c=\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\frac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}}\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}=\frac{\sin\frac{16\pi}{7}}{8\sin\frac{8\pi}{7}}=\frac{1}{8}.$$

Получили уравнение $x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{8}=0$, умножим на 8 и получим целые коэффициенты $8x^3+4x^2-4x+1=0$.

2 способ. Углы $\frac{2\pi}{7},\frac{4\pi}{7},\frac{8\pi}{7}$ удовлетворяют уравнению $\cos 6\alpha=\cos\alpha$, используя формулы косинуса двойного и тройного угла, получаем уравнение шестой степени относительно $x=\cos\alpha$:

$$32x^6-45x^4+18x^2-x-1=0.$$

Найдем лишние корни этого уравнения. Так как $\cos(6\cdot 0)=\cos 0$, то один из корней этого уравнения $x_4=\cos 0=1$. Также заметим, что $\cos(6\cdot\frac{2\pi}{5})=\cos\frac{12\pi}{5}=\cos\frac{2\pi}{5}$ и $\cos(6\cdot\frac{4\pi}{5})=\cos\frac{24\pi}{5}=\cos\frac{4\pi}{5}$. Значит, уравнение шестой степени имеет корни $x_5=\cos\frac{2\pi}{5}, x_6=\cos\frac{4\pi}{5}$. Углы $0,\frac{2\pi}{5},\frac{4\pi}{5}$ также удовлетворяют уравнению $\cos 4\alpha=\cos\alpha$, это уравнение в переменной $x=\cos\alpha$ принимает вид:

$$8x^4-8x^2-x+1=0,$$

Четвертый корень этого уравнения $x=\cos\frac{2\pi}{5}=-\frac{1}{2}$, он посторонний для уравнения шестой степени. Левая часть уравнения четвертой степени имеет множители (x-1)(2x+1) поэтому получаем:

$$\begin{aligned} 8x^4-8x^2-x+1 &= 8x^2(x-1)(x+1)-(x-1)=(x-1)(8x^3+8x^2-1) \\ &= (x-1)\big(4x^2(2x+1)+2x(2x+1)-(2x+1)\big) \\ &= (x-1)(2x+1)(4x^2+2x-1) \end{aligned}$$

Значит левая часть уравнения шестой степени делится на $x-1$ и $4x^2+2x-1$, поделим на эти множители и останется искомое уравнение третьей степени:

$$32x^6-45x^4+18x^2-x-1=(x-1)(4x^2+2x-1)(8x^3+4x^2-4x+1)$$

Ответ: $8x^3+4x^2-4x+1=0$

Критерии.

По 2 балла за каждый из коэффициентов уравнения,

2 балла- выписано уравнения через косинус кратного угла, из которого можно получить ответ (например, $\cos 6\alpha = \cos \alpha$, $\cos 7\alpha = 1$),

не менее 4 баллов, если правильно выписано уравнение более высокой степени.

7 баллов за полное решение.