

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ 5-6 КЛАССА
РЕСПУБЛИКИ БАШКОРТОСТАН
ПО МАТЕМАТИКЕ
2025-2026 УЧЕБНЫЙ ГОД
МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, Р.Н.Гарифуллин, А.Р.Миннихметов,
Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров

УФА - 2025

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.
4. Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	Правильность (ошибочность) решения
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

- а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;
 - б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;
 - в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;
 - г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.
5. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.

5 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Бумажная полоска разделена на 2025 клеток. Амир зачеркивает каждую седьмую клетку, Дамир - из оставшихся каждую пятую клетку, Камиль - из оставшихся зачеркнул каждую третью клетку. А Шамиль зачеркнул все клетки, что остались. Сколько клеток зачеркнул Шамиль?

Ответ: 926.

Решение.

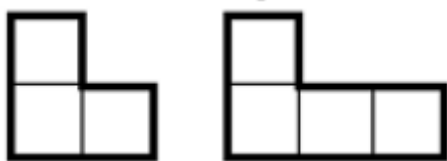
$2025 = 7 \cdot 289 + 2$. Амир зачеркнул каждую седьмую клетку из 2025, то есть 289. После этого осталось $2025 - 289 = 1736$ клеток.

$1736 = 5 \cdot 347 + 1$. Дамир зачеркнул каждую пятую, то есть 347 клеток. Осталось $1736 - 347 = 1389$ клеток.

$1389 = 3 \cdot 463$. Камиль зачеркнул каждую третью клетку. Осталось $1389 - 463 = 926$ клеток.

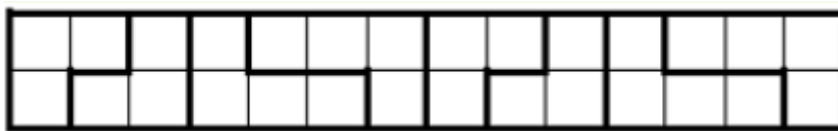
Критерии. Если одна арифметическая ошибка – ставить 3 балла. Если две и более арифметических ошибок – 0 баллов.

2. Составьте какой-нибудь квадрат, используя плитки двух типов (см. рисунок). Плитка каждого типа должна быть использована хотя бы один раз.



Решение.

Например, составим квадрат 14×14 из 7 таких полосок:



Критерий. Любой верный пример – 7 баллов.

3. В волшебном ожерелье, представляющем круг из 14 бусин, есть хотя бы одна розовая и хотя бы одна зеленая, бусины бывают только этих цветов. Каждую секунду происходит волшебство: бусина, у которой обе соседки были одного цвета, становится розовой, а бусина, у которой соседки были разных цветов, становится зеленой. Могут ли все бусины в некоторый момент времени одновременно стать зелеными?

Ответ. Не могут.

Решение. Пусть все бусины стали зелеными. Рассмотрим момент до этого. Пронумеруем бусины. Чтобы бусины с чётными номерами стали зелеными, их соседи должны быть разных цветов. То есть в парах 1 и 3, 3 и 5, 5 и 7, 7 и 9, 9 и 11, 11 и 13 — бусины разных цветов. Значит, бусины 1, 5, 9 и 13 — одного цвета. Но тогда у бусины 14 два соседа (1 и 13) одного цвета, и она не сможет стать зелёной. Значит, этого никогда не будет.

Критерий. Только ответ без верного обоснования – 0 баллов.

4. В одной школе отличники всегда говорят правду, а двоечники всегда лгут. Однажды 65 школьников по очереди были вызваны к директору. Каждый из них после этого сказал: «Среди людей, бывших в кабинете директора до меня, отличников ровно на 20 меньше, чем двоечников». Сколько отличников было среди 65 школьников?

Ответ. 23.

Решение. Первые 20 человек — двоечники, потому что до них всего было сделано не больше 19 заявлений, а значит, истинных не может быть ровно на 20 меньше, чем ложных. Далее 21-й человек говорит правду (ведь до него было ровно 20 ложных заявлений), значит, он отличник. Затем 22-й говорит неправду (до него было 20 ложных и 1 истинное заявление), значит, он двоечник. Далее 23-й человек говорит правду (ложных заявлений опять стало на 20 больше, чем истинных), значит, 23-й отличник, и так далее. Среди школьников, начиная с 21-го, те, кто с нечётными номерами, — отличники, а те, кто с чётными, — двоечники. Среди чисел от 21 до 65 включительно ровно 23 нечётных, поэтому отличников было ровно 23.

Критерий. При верном обосновании присутствует арифметическая

ошибка при подсчёте числа отличников — ставить 3 балла.

5. Перед фокусником лежат две кучки конфет: в одной 20 конфет, а во второй – 25. Фокус «Добавляйтус» увеличивает количество конфет в одной куче на 6, но уменьшает количество конфет в другой куче на 1. А фокус «Забирайтус» уменьшает количество конфет в одной куче на 3, а в другой – на 7. Оба фокуса срабатывают только в случае, когда в кучах достаточно конфет, чтобы их количество можно было уменьшить. Может ли фокусник такими фокусами получить в одной куче 22 конфеты, а в другой - 55?

Ответ: нет, не может.

Решение. Посмотрим, как меняется общее число конфет. При использовании фокуса «Добавляйтус» количество конфет увеличивается на 6 и уменьшается на 1, значит, в итоге увеличивается на $6-1=5$. При использовании фокуса «Забирайтус» количество конфет уменьшается на 3 и на 7, то есть в итоге уменьшается на $3+7=10$. Числа 5 и 10 делятся на 5, как и изначальное количество конфет $20+25=45$. Поэтому у фокусника общее число конфет всегда будет делиться на 5. С другой стороны, спрашивается, может ли стать конфет $22+55=77$. Так как это число на 5 не делится, то добиться указанного числа конфет в кучах не получится.

Критерий. Любые частные случаи – ставить 0 баллов.

6 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. В одном из лунных городов имеют хождение монеты в 13, 21 и 29 фертингов, а монет с другим номиналом нет. Однажды Пончик купил бутерброд, расплатившись несколькими монетами по 21 фертингу, и получил на сдачу на 4 монеты больше, чем дал продавцу, причём монеты всех трёх видов участвовали в обмене. Мог ли бутерброд стоить 4 фертинга?

Решение. Да, мог. Например, Пончик выдал 9 монет по 21 фертингу, а получил на сдачу 12 монет по 13 фертингов и 1 монету по 29 фертингов.

Критерии. Любой верный пример – 7 баллов. Пример не приведён или неверный (например, использованы не все виды монет) – 0 баллов.

2. Сравнить дроби:

$$\frac{\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024}}{\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024}} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} + \frac{1}{2025}}{\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024} + \frac{1}{2025}}$$

Ответ. Первая дробь меньше.

Решение. Пусть $\frac{1}{2021} - \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} - \frac{1}{2024} = x$, $\frac{1}{2021} + \frac{1}{2022} + \frac{1}{2023} + \frac{1}{2024} = y$.

Тогда нужно сравнить $\frac{x}{y}$ и $\frac{x + \frac{1}{2025}}{y + \frac{1}{2025}}$. Или $xu + \frac{x}{2025}$ и $xu + \frac{y}{2025}$. Т.к. $x < y$, то первая дробь меньше.

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Без доказательства используется факт, что при увеличении числителя и знаменателя правильной дроби на одно и то же положительное число дробь увеличивается – 2 балла. Только ответ – 0 баллов. Вычисления в явном виде с одной арифметической ошибкой, не влияющей на дальнейшие рассуждения и ответ – 3 балла.

Примечание. Домножение на знаменатели без упоминания об их положительности – баллы не снимаются.

3. На острове живут три племени: эльфы, гоблины и гномы. Однажды 16 островитян, среди которых были представители всех трёх племён, встали в клетках квадрата 4×4 так, что в одной клетке квадрата 1×1 оказался ровно один островитянин. Каждый из них сказал: «Ровно один мой сосед – эльф (соседями считают островитян, которые стоят в квадратах 1×1 , имеющих общую сторону)». Известно, что эльфы всегда говорят правду, гоблины всегда лгут, а гномы говорят правду только тогда, когда имеют хотя бы одного соседа – эльфа. Какое наибольшее количество эльфов могло оказаться среди этих 16 островитян? Приведите пример такого расположения островитян и докажите, что большего количества эльфов быть не могло.

Решение. 8 эльфов.

Разобьём квадрат на четыре квадрата 2×2 . В каждом таком квадрате не более 2 эльфов, иначе они образуют уголок из трёх клеток, и средний эльф в этом уголке соврал, чего не может быть.

Пример на 8 эльфов:

Э	Э	ГО	Э
ГО	ГО	ГН	Э
Э	Э	ГО	ГО
ГН	ГО	Э	Э

Критерии. Полное решение – 7 баллов. Приведён верный ответ и пример расположения островитян – 3 балла. Приведено доказательство того, что более 8 эльфов не может быть – 3 балла. Только ответ – 0 баллов.

Примечания. Разбор частных случаев не является доказательством оценки на 8 эльфов.

В верном примере есть представители всех трёх племён!

4. Однажды Сабина убегала от хулигана Ромы. Около магазина «Чёрное и жёлтое», Рома оказался через 10 секунд после Сабины, остановился на некоторое время и продолжил погоню. У подъезда Сабины он оказался ровно в тот момент, когда Сабина захлопнула дверь. Если бы Рома не задерживался около магазина, то он догнал бы Сабину в 8 метрах от подъезда. Сколько секунд Рома стоял около магазина, если известно, что магазин находится в 48 метрах от подъезда? Скорости бега Ромы и Сабины всегда постоянные.

Ответ: 2 секунды.

Решение. Когда Рома достиг магазина, Сабина опережала его на 10 секунд. Если бы Рома не останавливался, то догнал бы Сабину через 40 м. Значит, он после каждых пройденных 4 м сокращал отставание от Сабины на 1 секунду. Так как он догнал ее на 8 м дальше, то около магазина он стоял 2 секунды.

Критерии. Верное решение – 7 баллов. Только верный ответ с примером – 1 балл. Только ответ – 0 баллов.

5. По кругу сели 2025 человек. В начале одному из них выдали 2024 конфеты, а его соседу (по часовой стрелке) – одну конфету. Каждую секунду те, у кого имеются конфеты, передают по одной конфете ближайшему по часовой стрелке от себя человеку у которого конфет нет (например, через секунду у первого будет 2023 конфеты, у третьего – две). Может ли в какой-то момент у каждого из сидящих в этом круге оказаться ровно по одной конфете?

Решение. Пусть такое возможно. Рассмотрим последнюю передачу конфет. Одна конфета может быть, если было две и одну передали, ничего при этом не получив, или, когда у нас было 0 конфет, а мы получили одну. Заметим, что люди с нулём и двумя конфетами должны чередоваться, т.к. если две «двойки» конфет подряд, то ближайший «ноль» получит более одной конфеты, а если два «нуля» подряд, то один из них конфет не получит. Тогда все в кругу должны разбиться на пары 2 конфеты – 0 конфет, т.е. в кругу должно быть чётное число людей.

Критерии. Верное решение – 7 баллов. Идея рассмотреть последний ход – 2 балла. Сформулировано, но не доказано, что нули и двойки должны чередоваться – 5 баллов. Не доказано, что если нули и двойки чередуются, то количество человек в кругу чётное – не снижать.