ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2025-2026 УЧЕБНЫЙ ГОД

РЕСПУБЛИКА БАШКОРТОСТАН

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, Р.Н.Гарифуллин, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров

УФА - 2025

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.
2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.
3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.
4. Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;

в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

5. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.

7 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Определите количество семизначных симметричных чисел, записанных только четными цифрами. (Симметричным считаем число, одинаково читаемое и слева направо, и справа налево.)

Ответ. 500.

Решение. У таких чисел совпадают 7-я и 1-я, 6-я и 2-я, 5-я и 3-я цифры. Поэтому выбрать нужно только цифры на позиции 1-4. Исходя из условия, 1-я выбирается из 4-х вариантов: 2, 4, 6, 8, так как 0 на первом месте быть не может, все дальнейшие из 5. Учитывая независимость выбора, число вариантов надо перемножать. Получим $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 500$.

Критерии. Записан ответ без обоснований – 0 баллов; в решении не учтено, что 0 не может быть первой цифрой, получен ответ 625 – 3 балла; логика решения верна, допущена вычислительная ошибка – 5 баллов.

2. Брокер имеет некоторое количество акций и совершает одну биржевую операцию в секунду: либо продает, либо покупает количество акций, равное номеру секунды, начиная с первой. На какое минимальное число может отличаться от первоначального количество акций у этого брокера после 2025-й секунды торгов?

Ответ. На 1.

Решение. Количество акций у брокера после 2025 секунд торгов отличается от исходного на $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \pm \cdots \pm 2025$. В этом выражении нечетное число нечетных слагаемых, их 1013. Поэтому значение этого выражения в любом случае нечетно, и поэтому не равно 0. Тогда минимальная величина отклонения равна 1. Ее можно получить, например, так: $1 + 2 + 2025 - 3 - 2024 + 4 + 2023 - 5 - 2022$ ..., то есть числа, кроме 1, разбиты на пары с равной суммой, этих пар 1012, и половина из них взята со знаком плюс, остальные – со знаком минус.

Критерии. Замечено, что величина нечетна – 2 балла. Дополнительно к вышесказанному сделан вывод, что минимальное значение отклонения равно 1 – 3 балла (с предыдущим не суммируется, а поглощает его). Приведен любой верный пример получения 1 без предыдущих обоснований – 2 балла. Приведены и рассуждения, приводящие к 1, и любой верный пример – 7 баллов.

Замечание. Пример не единственный, и может быть приведен в любой форме, в том числе описательной.

3. Имеется десять внешне не различимых гирь с массами 1,2,…,10 грамм, и надписи о массах гирь стерты. Также имеются чашечные весы, показывающие разность масс на двух чашах. Верно ли, что сделав всего одно взвешивание, можно однозначно установить массу хотя бы одной гири?

Ответ. Верно.

Решение. Положим на первую чашу любую одну гирю, пусть ее масса x г, а на вторую – остальные девять. Поскольку сумма масс всех гирь определена и равна 55 г, на второй чаше окажется $55\text{-}x$. Тогда при разных весах на первой чаше весы будут показывать разную разницу весов, она будет равна $55\text{-}2x$, и вес гири на первой чаше можно точно определить.

Критерии. Ответ «нет», обоснованный любым образом, или же любой алгоритм определения веса гири, позволяющий сделать это не во всех случаях либо при каких бы то ни было дополнительных условиях – 0 баллов; верный алгоритм при недостаточном его обосновании – 5 баллов.

4. Обозначим $[x]$ – *целой частью* числа - наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[1,5] = 1$, $[-1,5] = -2$. Обозначим $\{x\}$ – *дробной частью* числа – разность между числом и его целой частью, то есть $\{x\} = x - [x]$.

Решите уравнение $[x] + 5\cdot\{x\} = 20,25$.

Ответ. 16,85; 17,65; 18,45; 19,25; 20,05.

Решение. Учитывая, что $[x]$ – наибольшее целое число, меньшее или равное x, получаем, что $0\leq\{x\}<1$. Тогда $0\leq5\{x\}<5$, и при этом $[x]$ – число целое, поэтому дробная часть полностью входит во второе слагаемое. Получаем возможные варианты значений $5\{x\}$: это 0,25; 1,25; 2,25; 3,25; 4,25. Далее, $[x] = 20,25 - 5\{x\}$, и, наконец, $x = [x] + \{x\}$.

Удобно составить таблицу, приводящую к верным значениям x:

$5\{x\}$	$\{x\}$	$[x]$	x
0,25	0,05	20	20,05
1,25	0,25	19	19,25
2,25	0,45	18	18,45
3,25	0,65	17	17,65
4,25	0,85	16	16,85

Критерии. Подбором найдено одно значение x=20.05 – 1 балл. Найдено тоже подбором без обоснований более одного значения, но не все – 2 балла. Верно найдены все пять значений без обоснований – 3 балла. Обоснованно найдены все значения, но допущены арифметические однотипные ошибки – 6 баллов. То же, но ошибки разных видов – 5 баллов.

5. Завхозу спортивного лагеря было нечего делать, и он решил провести учет банок с тушенкой. Завхоз стал раскладывать все имеющиеся банки в две коробки всеми возможными способами и установил, что число банок, лежащих в первой коробке, ровно в восьми случаях составило целое число процентов от общего числа банок. Сколько банок всего могло быть?

Ответ. Такое невозможно.

Решение. Пусть всего банок n, в т.ч. в первой коробке m. Число банок в первой коробке от общего числа банок составляет $\frac{m}{n} \cdot 100\%$, то есть по условию задачи число $\frac{100m}{n}$ должно быть целым для ровно восьми значений m, причем $0 \leq m \leq n$. В двух случаях m=0 и m=n это число – целое, независимо от выбора числа n, в остальных ситуациях требуется, чтобы 100m делилось на n, при том, что 0<m<n. Для этого в числе n должны присутствовать делители числа 100, а в числе m – другие делители числа n. Пусть p – один из общих делителей n и 100, тогда получим, что 100 = pq, n = pk. Нужная делимость будет для значений m из множества k, 2k, 3k,…(p-1)k и только для них, то есть количество этих значений составляет p-1, а с учетом ранее упомянутых крайних 0 и n их становится p+1. То есть по условиям задачи, p+1=8, отсюда p = 7 – делитель 100, что неверно.

Критерии. Неверный ответ вне зависимости от объяснений – 0 баллов. Получен верный ответ, но не обоснован – 1 балл. Ответ обоснован недостаточно – от 2 до 5 баллов: если сведено к рассмотрению дроби без дальнейших продвижений – 2 балла; указано, какой вид должно иметь число в знаменателе – 3 балла; связано с делителями числа 100 – 4 балла; не произведено выписывание возможных значений, а сразу сделан вывод – 5 баллов.

6. В шахматном турнире участвовало 20 человек и каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Известно, что каждый участник хотя бы один раз сыграл вничью и что если какие-то два человека сыграли вничью, то каждый из остальных восемнадцати выиграл у кого-то из них. Докажите, что все участники выиграли одинаковое количество партий.

Решение. Предположим, что какой-то игрок A сыграл вничью более одного раза. Рассмотрим людей B и C, с которыми он сыграл вничью. Тогда с одной стороны B выиграл у C, а с другой - C выиграл у B – противоречие. Значит, каждый сыграл вничью ровно один раз. Теперь предположим, что какой-то игрок A выиграл более 9 игр, т.е. хотя бы 10. Тогда среди людей, у которых он выиграл, обязательно найдутся двое B и C, сыгравшие вничью. Пусть A сыграл вничью с D. Тогда B и C выиграли у D (т.к. A они проиграли), с другой стороны D должен выиграть у кого-то из B и C – противоречие. Значит, каждый игрок выиграл не более 9 игр. Всего игр $20 \cdot 19/2 = 190$ и из них 10 сыграно вничью, т.е. игр не вничью сыграно 180 и если какой-то из игроков выиграл не более 8 игр, то какой-то выиграл более 9 игр, потому что в противном случае общее число игр окажется меньше требуемого. Значит, каждый выиграл хотя бы 9 раз. Это возможно только тогда, когда каждый выиграл ровно 9 игр – что и требовалось.

Такой турнир возможен. Разобьем участников на 5 групп по четыре человека. В каждой группе играют вничью игроки 1-2 и 3-4, 1-й выигрывает у 3-го и проигрывает 4-му, 2-й выигрывает у 4-го и проигрывает 3-му. Далее, каждый участник этой группы выигрывает у всех участников двух следующих групп и проигрывает всем участникам двух оставшихся групп (считаем группы расположенными по кругу, то есть за 5-й следующей будет 1-я).

Замечание. Поскольку турнир объявлен в условии задачи как состоявшийся, приведение примера от участников олимпиады не требуется, и решение может не содержать последнего абзаца.

Критерии. Показано, что ничьих у каждого игрока ровно по одной – 2 балла; далее показано, что игрок не мог выиграть более 9 игр – 4 балла; произведен подсчет числа игр – +1 балл к любому ранее описанному случаю; сделан верный вывод на основе подсчета и двух предыдущих соображений, недостаточно обоснованный – 6 баллов.

8 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Три положительных числа таковы, что если из одного вычесть двойку, ко второму прибавить двойку, а третье возвести в квадрат, то получится первоначальный набор трёх чисел. Из каких трёх чисел состоит набор, если их сумма 2025?

Ответ: 1013, 1011, 1.

Решение: Если обозначить неизвестные три числа как x, y и z, то после изменения получим тройку чисел $(x-2), (y+2), z^2$. Так как набор чисел не изменился, то и сумма трёх чисел в наборе не изменилась, а значит $x+y+z=(x-2)+(y+2)+z^2$, откуда получим, что $z=z^2$ и единственное положительное число равное своему квадрату есть единица, то есть $z=1$ и тогда сумма чисел $x+y=2024$. Переберём варианты возможных равенств между числами из набора. Для каждого варианта проверяем выполнение всех условий. Остаётся один возможный вариант (первые два числа после преобразования меняются местами): $x-2=y$. Вместе с условием $x+y=2024$ получим единственную тройку требуемых чисел: $x=1013$, $y=1011$, $z=1$.

Критерии: Полное обоснованное решение (с перебором всех возможных вариантов) и верный ответ – 7 баллов. Просто верный ответ без решения и обоснования(например, просто проверено выполнение условий) – 2 балла.

2. Лёня придумал новую функцию, которая для заданного натурального числа выдаёт количество всех натуральных чисел, меньших заданного и взаимно простых с ним. Какое значение функция Лёни выдаст для аргумента 935?

Ответ: 640.

Решение: Число 935 состоит из трёх простых сомножителей: $935 = 5 \cdot 11 \cdot 17$. Тогда все числа, меньшие 935, не кратные хотя бы одному из $5, 11$ или 17 будут взаимно просты с 935. Подсчитаем количество таких чисел, кратных $5, 11$ или 17, а также их парным комбинациям ($5 \cdot 11$, $5 \cdot 17$ и $11 \cdot 17$).

Для подсчёта всех таких чисел используем формулу включения-исключения для суммы трёх попарно пересекающихся множеств чисел. Обозначим множество натуральных чисел кратных 5 и меньших 935 как A_5, а количество таких чисел $M(A_5)$. Количество таких чисел среди первых 935 чисел равно $935:5 = 187$, а значит, меньших, чем 935 – ровно 186 штук. Аналогично, для чисел, кратных 11 – множество B_{11} и количество таких чисел $M(B_{11}) = 935:11 - 1 = 84$. Для чисел, кратных 17 – множество C_{17} и количество таких чисел $M(C_{17}) = 935:17 - 1 = 54$. Теперь, количество чисел, кратных $5 \cdot 11$ – их $935:55 - 1 = 16$ штук, кратных $5 \cdot 17$ – их $935:85 - 1 = 10$ штук, кратных $11 \cdot 17$ – их $935:187 - 1 = 4$ штуки. Заметим, что все три множества A_5, B_{11} и C_{17} в пересечении не имеют общих элементов(самое первое было бы 935). Формула включения-исключения даёт:

$$M(A_5 \cup B_{11} \cup C_{17}) = M(A_5) + M(B_{11}) + M(C_{17}) - M(A_5 \cap B_{11}) -$$
$$-M(A_5 \cap C_{17}) - M(B_{11} \cap C_{17}) + M(A_5 \cap B_{11} \cap C_{17}) =$$
$$= 186 + 84 + 54 - 16 - 10 - 4 + 0 = 294.$$

Итого, 294 числа из первых 934 натуральных чисел имеют общие множители с числом 935. Значит, взаимно простых с числом 935 всего $934 - 294 = 640$ чисел.

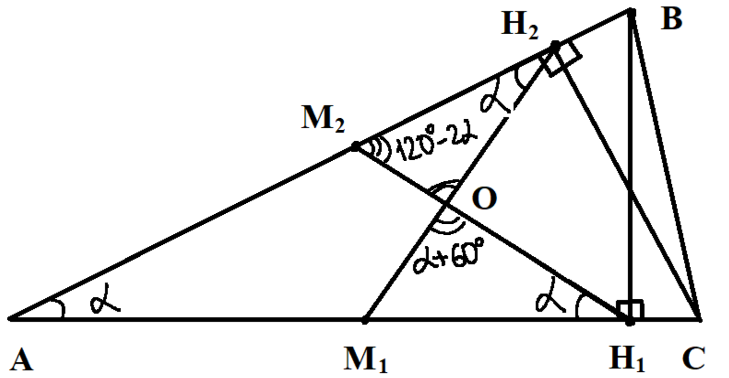
Заметим, что приведённая функция Лёни известна в теории чисел как функция Эйлера $\varphi(n)$. Одним из известных свойств функции Эйлера является мультипликативность: для двух взаимно простых чисел m и n верно: $\varphi(mn) = \varphi(m) \cdot \varphi(n)$. Это позволяет вычислить значение функции Лёни для аргумента 935 как

$$\varphi(935) = \varphi(5) \cdot \varphi(11) \cdot \varphi(17) = 4 \cdot 10 \cdot 16 = 640.$$

Критерии: Полное решение – 7 баллов. За полностью переборный вариант решения, в случае правильного подсчёта – 7 баллов. При использовании функции Эйлера обязательна отсылка к её свойствам, которые будут использованы(без доказательства). Пропущено число 1 (оно взаимно простое со всеми натуральными числами) – (-1) к общей сумме баллов. Ошибки при использовании формулы включений-исключений считать критическими – 0 баллов. Ответ без обоснования – 0 баллов.

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BH_1, CH_2 и медианы BM_1, CM_2. Известно, что угол между прямыми M_1H_2 и M_2H_1 на 60 градусов больше градусной меры угла А. Какова градусная мера угла А?

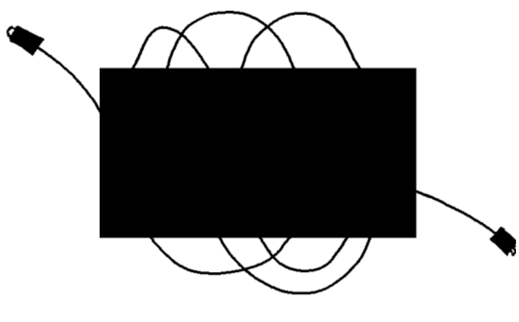
Ответ: 30°.



Решение: Рассмотрим точку O пересечения прямых M_1H_2 и M_2H_1. Пусть для определённости указанный угол между прямыми будет M_2OH_2. Обозначим величину угла треугольника ABC при вершине A как α. Тогда, величина угла M_2OH_2 равна $\alpha + 60°$. Рассмотрим прямоугольный треугольник AH_2C. Для него отрезок H_2M_1 – медиана, проведённая из вершины прямого угла. Нетрудно доказать, что она отсекает от треугольника AH_2C два равнобедренных треугольника AH_2M_1 и CH_2M_1. Следовательно, угол AH_2M_1 равен углу A, а тогда в треугольнике M_2OH_2 величина угла H_2M_2O равна $180° - \left(\alpha + (\alpha + 60°)\right) = 120° - 2\alpha$.

Аналогично, рассматривая медиану в треугольнике ABH_1, проведённую из вершины прямого угла, получим равенство углов A и AH_1M_2. Рассмотрим теперь равнобедренный треугольник AM_2H_1с двумя равными острыми углами, равными α. Угол $H_2M_2H_1$ для него является внешним углом при вершине M_2, а значит его величина равна сумме углов треугольника не смежных с ним, то есть, $\alpha + \alpha = 120° - 2\alpha$, откуда легко получить $\alpha = 30°$. Случай, когда угол между прямыми M_1H_2 и M_2H_1 будет H_2OH_1 рассматривается аналогично и ответ тот же.

Критерии: Полное обоснованное решение – 7 баллов. Доказано, что треугольники AM_2H_1 и AM_1H_2 равнобедренные – 2 балла. При верном ходе решения и верном ответе рассмотрены не все случаи острого угла между прямыми M_1H_2 и M_2H_1 – 5 баллов. Только ответ – 0 баллов.



4. Меланья запутала USB-провод для зарядки, положила поверх спутанного провода телефон, сфотографировала и выложила фото (см. рисунок) в сторис,

предложив желающим отгадать, сколько существует вариантов соединения частей провода под телефоном(какие видимые части провода соединены с какими). Итак, сколько вариантов? Ответ обосновать.

Ответ: $6! \cdot 2^6$ вариантов.

Решение: Рассмотрим те части провода, что торчат из-под телефона. Пара из них – разные концы провода со штекерами(левый и правый, для определённости) и 6 кусков провода, имеющие 2 конца, уходящие под телефон. Так как провод один и тот же, какие-то его куски соединяются под телефоном с какими-то другими. Посчитаем количество разных вариантов соединения. Для удобства, рассмотрим соединение шести кусков друг с другом, а потом для каких-то двух кусков по одному из концов соединим с правым и левым кусками со штекером. Итак, отметим все шесть кусков провода разным цветом и «распрямим провод». Все шесть кусков на прямом проводе расположены в каком-то порядке и количество вариантов разного расположения кусков – это количество перестановок из шести – $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6!$ Заметим, что каждый цветной кусок может двумя способами быть ориентирован(можно поменять местами концы куска – 2 разных варианта). Согласно правилу произведения комбинаторики, количество разных вариантов соединения $6! \cdot 2^6 = 46080$ вариантов.

Критерии: Полное обоснованное решение – 7 баллов. Если при верном решении участник рассматривает «одинаковые» концы провода и получает результат в 2 раза больший/меньший – 4 балла. Только ответ, без обоснования – 0 баллов.

5. Какое наибольшее число нечётных цифр может иметь пятизначное число, делящееся нацело на 101? Ответ обосновать.

Ответ: 4 цифры.

Решение: Для примера(на 4 цифры) можно предоставить любое подходящее число, имеющее ровно 4 нечётные цифры и кратное 101. Например, $99990 = 990 \cdot 101$ – самое большое из возможных. Теперь докажем, что все пять цифр не могут быть нечётными.

Приведём доказательство от противного. Для этого рассмотрим трёхзначное число $\overline{abc}$, умножив на которое 101 получим искомое число $A = \overline{abc} \cdot 101$ с пятью нечётными цифрами. Заметим, что его можно записать как $A = \overline{abc} \cdot 100 + \overline{abc} = \overline{ab} \cdot 1000 + (a + c) \cdot 100 + \overline{bc}$. Последние две цифры числа –

нечётные по условию, значит b и c – нечётные. Цифра разряда сотен нечётная, а значит и у суммы $(a+c)$ в разряде единиц нечётна. Так как цифра c нечётна, то a – чётная цифра. Заметим, что так как цифра разряда тысяч должна быть нечётной, то перехода через десяток в сумме $(a+c)$ не может быть (иначе в разряде тысяч окажется чётная цифра, так как $(b+1)$ – чётно). Итак, в старшем разряде остаётся чётная цифра a(так как иначе должен быть переход через десяток в предыдущем разряде, и в разряде тысяч будет чётная цифра 0), а значит получаем противоречие с тем утверждением, что все цифры числа нечётны. Заметим, что трёхзначность числа $\overline{abc}$ существенна: двузначные множители не приводят к пятизначному при умножении на 101.

Критерии: Заметим, что данная задача на тему «оценка плюс пример». Поэтому в решении оценивается не только оценка(не более 4-х нечётных цифр), но и пример, подтверждающий, что 4 цифры точно есть. Причём, наличие доказательства, что не более 4-х нечётных цифр(оценку) – 5 баллов максимум, а наличие примера на 4 нечётные цифры – 2 балла. Полное решение (обоснованная оценка и правильный пример) – 7 баллов. Отдельно оценивается доказательство, что возможно не более 4-х нечётных цифр(оценка) – 5 баллов максимально за эту часть решения. За приведённый верный пример(их много, нужно проверять предоставленный вариант) – 2 балла при наличии оценки на 4 цифры. Если оценки нет(или она недостаточно обоснована), то приведённый пример – не более 1 балла. Только ответ (без доказательства и примера) – 0 баллов.

6. В гардеробе театра в очереди друг за другом стоят 50 мальчиков и 50 девочек в каком-то порядке. Скучающий охранник театра заметил, что в этой очереди есть ровно одна группа из 30 детей, стоящих подряд, в которой мальчиков и девочек поровну. Помогите доказать охраннику, что найдётся группа из 70 стоящих подряд детей, в которой мальчиков и девочек также будет поровну.

Решение(доказательство): Если расположить очередь из детей в виде круга, то по условию задачи найдётся группа из 30 детей, в которой мальчиков и девочек равное количество. Докажем, что таких групп в круге не менее двух.

Рассмотрим такую группу из 30 детей, где количество мальчиков и девочек разное(пусть, для определенности, мальчиков меньше половины). Если предположить, что кроме той группы, что замечена в очереди, других нет, то имеем 100 подряд стоящих по кругу детей, среди которых мальчиков и девочек поровну(по 50), но в любых группах(кроме ровно одной) по 30 детей подряд мальчиков и девочек не поровну.

Докажем, что если найдется группа из 30 детей, где мальчиков больше половины, то найдётся и группа из 30 детей, где мальчиков меньше половины. Действительно, если последовательно выбирать из круга все возможные группы из 30 подряд стоящих детей, в которых мальчиков будет не меньше половины, то среди 100 детей мальчиков будет больше, чем девочек (каждый ребёнок входит ровно в 30 групп, а при подсчёте суммы всех мальчиков во всех группах их суммарно не меньше половины), что противоречит условиям. То есть, в круге есть две группы по 30 детей, в одной из которых мальчиков больше половины, а в другой – меньше половины. Тогда, последовательно перебирая группы из 30 детей, начиная с одной группы(больше половины мальчиков) и двигаясь ко второй группе(меньше половины), в какой-то момент получим группу из 30 детей с равным количеством мальчиков и девочек(так как каждая новая группа по количеству мальчиков меняется на 1 или не меняется). То же можно утверждать, двигаясь по кругу в противоположном направлении. Таким образом, показали, что в круге не менее двух групп по 30 подряд стоящих детей, в которых мальчиков и девочек поровну.

Тогда при размыкании круга обратно в очередь, все кроме одной такие группы с равным количеством девочек и мальчиков по условию должны разорваться, значит, между частями, на которые каждая такая группа разорвалась(между крайними детьми в группе), в ряду стоит ровно 70 детей, среди которых девочек и мальчиков поровну. Что и требовалось доказать.

Возможны и другие методы доказательства, необходимо внимательно проверять утверждения и их обоснование.

Критерии: Полное обоснованное решение – 7 баллов. Рассмотрение частных случаев расположения детей в очереди и необоснованные обобщения на общий случай – 0 баллов.

9 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Вычислите значение выражения $\sqrt{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}$, где $\boldsymbol{A} = \underbrace{11\ldots 1}_{2026\,раз}$, $\boldsymbol{B} = \underbrace{22\ldots 2}_{1013\,раз}$

Решение 1. Обозначим через $\boldsymbol{X}$ следующее число $\boldsymbol{X} = \underbrace{11\ldots 1}_{1013\,раз}$. Тогда

$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{2X}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}\cdot 10^{1013} + \boldsymbol{X}$, $10^{1013} - 1 = 9\boldsymbol{X}$,

откуда $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{1}+\boldsymbol{9X}) + \boldsymbol{X} - \boldsymbol{2X} = \boldsymbol{9X^2}$. Следовательно

$\sqrt{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}} = 3\boldsymbol{X} = \underbrace{33\ldots 3}_{1013\,раз}$,

Решение 2. Запишем разложение наших чисел по разрядам

$$A = 1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{2025}, \qquad B = 2(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{1012}),$$

тогда

$$\sqrt{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}} = \sqrt{(1 + 10^1 + 10^2 + \cdots + 10^{2025}) - 2(1 + 10 + 10^2 + \cdots + 10^{1012})} =$$

$$= \sqrt{\frac{10^{2026}-1}{9} - 2\frac{10^{1013}-1}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{10^{2026} - 2\cdot 10^{1013} + 1} = \frac{1}{3}\sqrt{(10^{1013}-1)^2} =$$

$$= \frac{10^{1013}-1}{3} = \underbrace{33\ldots 3}_{1013\,раз},$$

Ответ: $\underbrace{33\ldots 3}_{1013\,раз}$.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов. Арифметическая ошибка либо ошибка в подсчете числа разрядов числа – не более 6 баллов.

2. Для любых двух действительных чисел a и b определена операция $a \lozenge b$ следующим образом: $a \lozenge b = a + b + k\cdot a\cdot b$, где k — некоторое фиксированное действительное число, не равное нулю. Известно, что:

(1) операция $\lozenge$ является ассоциативной, то есть для любых a, b, c выполняется: $(a \lozenge b) \lozenge c = a \lozenge (b \lozenge c)$,

(2) существует такое число e, что для любого a выполняется: $a \lozenge e = e \lozenge a = a$.

Найдите числа e и k, для которых выполнены свойства (1)-(2)

Решение:

Проверим (1) левая часть равна $(a \lozenge b) \lozenge c = (a+b+k \cdot a \cdot b) \lozenge c = (a+b+k \cdot a \cdot b) + c + k \cdot (a+b+k \cdot a \cdot b) \cdot c = a+b+c+k \cdot a \cdot b + k \cdot a \cdot c + k \cdot b \cdot c + k^2 \cdot a \cdot b \cdot c,$

Правая часть равна $a \lozenge (b \lozenge c) = a \lozenge (b+c+k \cdot bc) = a+b+c+k \cdot b \cdot c + k \cdot a \cdot (b+c+k \cdot b \cdot c) = a+b+c+k \cdot b \cdot c + k \cdot a \cdot b + k \cdot a \cdot c + k^2 \cdot a \cdot b \cdot c$. Видим, что правая и левая часть совпадают при всех k.

Проверим (2): $\mathrm{a} \lozenge \mathrm{e} = \mathrm{a} + \mathrm{e} + \mathrm{k} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{e} = \mathrm{a}$, значит $0 = \mathrm{e} + \mathrm{k} \cdot \mathrm{a} \cdot \mathrm{e} = \mathrm{e} \cdot (1 + \mathrm{k} \cdot \mathrm{a})$, так как это равенство должно выполняться при всех a, в частности при $\mathrm{a} = 0$, то получаем что $\mathrm{e} = 0$.

Ответ: k любое, $e = 0$.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов. Обосновано получено число e – 3 балла. Проверена ассоциативность и сделан вывод про произвольность числа k – 4 балла.

3. Робот находится в точке с координатой 0 на числовой прямой. Он делает последовательность из 6 шагов. Каждый шаг он с равной вероятностью сдвигается либо на +1 (вправо), либо на -1 (влево). Какова вероятность того, что после 6 шагов он окажется в точке с координатой 0, но при этом ни разу за всю прогулку не побывает в точке с координатой -1?

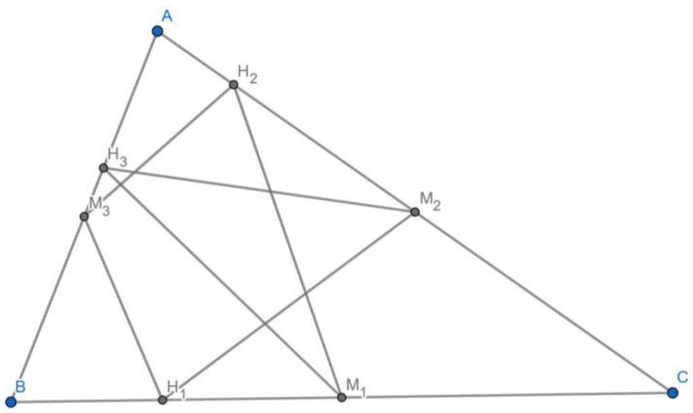
Решение.

Всего у робота 2^6 вариантов путей. Найдем количество вариантов, удовлетворяющих условию. Во-первых, раз робот попал в точку 0, значит он сделал ровно 3 шага влево и 3 шага вправо, а это можно сделать 6*5*4:(3*2)=$20 = C_6^3$ способами. Теперь найдем число путей, проходящих через точку -1. Заметим, что это количество равно числу путей, заканчивающихся в точке -2, так как позиции «-2» и «0» симметричны относительно «-1». Число путей, заканчивающих в точке -2 должно состоять из 4 шагов влево и 2 шагов вправо, следовательно, оно равно 6*5:2=15=C_6^2. Количество путей, попадающих в точку 0 и не проходящих через -1, равно $20 - 15 = 5$. Тогда искомая вероятность равна $\frac{5}{64}$.

Ответ: $\frac{5}{64}$.

Критерии. Только верный ответ – 1 балл (не суммируется со следующими), найдено общее количество вариантов – 1 балл, обосновано найдено число способов попасть в точку 0, не проходя через -1 – 5 баллов, если задача верно решена методом перебора – баллы не снимать.

4. В треугольнике ABC H_1, H_2, H_3 — основания высот, проведенных соответственно из вершин треугольника A, B, C, а M_1, M_2, M_3 — середины соответствующих сторон BC, AC, AB. Докажите, что длина ломаной $M_1H_2M_3H_1M_2H_3M_1$ больше суммы высот треугольника ABC.



Решение. Опустим из точек M_3 и M_2 перпендикуляры на BC. Так как M_3M_2 параллельна BC как средняя линия ΔABC, то эти перпендикуляры равны половине высоты ΔABC, проведенной из точки A. Тогда M_3H_1 и M_2H_1 – наклонные к BC. Следовательно, каждая из них не меньше высоты, а их сумма строго больше высоты ΔABC, опущенной из точки A. Сумма строго больше, так как только одна из наклонных может совпадать с перпендикуляром в случае прямого угла при одной из вершин. То есть $M_3H_1 + M_2H_1 > AH_1$. Аналогично доказывается, что $M_2H_3 + M_1H_3 > CH_3$ и $M_3H_2 + M_1H_2 > BH_2$, откуда и следует нужное утверждение.

Критерии. В решении присутствует идея о сравнении какой-либо наклонной с перпендикуляром – не менее 2 баллов. Не обоснована строгость неравенства - не более 6 баллов.

5. Доказать, что для решений уравнения

$$x^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}px - \frac{3}{4p^2} = 0$$

выполняется оценка
$x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}.$

Решение. Заметим, что дискриминант уравнения неотрицателен при любых допустимых p. По теореме Виета имеем $x_1 + x_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}}p,\quad x_1x_2 = -\frac{3}{4p^2}$. Найдем выражение $x_1^4 + x_2^4 = x_1^4 + x_2^4 + 2x_1^2 \cdot x_2^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 \cdot x_2 - 2x_1 \cdot x_2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = ((x_1 + x_2)^2 - 2x_1 \cdot x_2)^2 - 2x_1^2 \cdot x_2^2 = \left(\frac{2}{3}p^2 + \frac{3}{2p^2}\right)^2 - 2\frac{9}{16p^4} = \frac{4}{9}p^4 + 2 + \frac{9}{4p^4} - \frac{9}{8p^4} = 2 + \frac{4}{9}p^4 + \frac{9}{8p^4} = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(\frac{2\sqrt{2}}{9}p^4 + \frac{9}{2\sqrt{2}p^4}\right) \geq 2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 = 2 + \sqrt{2}.$ Здесь использовано неравенство $a + a^{-1} \geq 2$, верное при $a > 0$.

Замечание. Решение можно было провести, опираясь только на идею выделения полного квадрата, в частности, для доказательства того, что $\frac{2\sqrt{2}}{9}p^4 + \frac{9}{2\sqrt{2}p^4} \geq 2,$ можно перенести 2 влево и вновь выделить полный квадрат.

Критерии. В решении отсутствует исследование дискриминанта – не более 5 баллов. Неверно выписаны формулы Виета – 0 баллов.

6. Два игрока, Аня и Боря, играют в следующую игру. Перед ними лежит коробок, в котором N спичек. Игроки ходят по очереди, первой ходит Аня.

За один ход игрок может взять из кучи любое положительное число спичек, являющееся делителем текущего количества спичек в куче, кроме самого этого числа. (Например, если в куче 12 спичек, то можно взять 1, 2, 3, 4 или 6 спичек. Кто взял последнюю спичку проигрывает. Для N от 100 до 200 найти такие, при которых Аня выигрывает при правильной игре.

Решение.

Заметим, что у нечетных чисел только нечетные делители. Поэтому после нечетного количества спичек всегда остается четное количество спичек.

Докажем, что выигрывает игрок, перед которым лежит четное количество спичек. Его стратегия: взять 1 спичку, так можно сделать всегда. После такого хода перед следующим игроком нечетное количество спичек. Тогда после его хода остается вновь четное количество спичек либо ноль спичек. Т.е. мы видим, что если перед Аней четное количество спичек, то она выиграет. А если нечетное, то после ее хода перед Борей обязательно будет четное количество и он выиграет.

Далее возможно двоякое понимание условия участниками: если участник посчитал, что когда игроку досталась 1 спичка, он не может ходить, игра на этом останавливается. Если участник посчитал, что когда игроку досталась 1 спичка, он обязан ее взять, то этот игрок и проиграл.

Ответ: при любых четных N от 100 до 200, либо «игра не завершится, остановившись на 1 спичке».

Критерии. Только верный ответ без обоснований – 0 баллов, показано, что после нечетного количества всегда получается четное – не менее 2 баллов, нет стратегии игрока (в частности не показано, что у четных чисел есть нечетный делитель)– не более 4 баллов.

Если участник понял условие в первой трактовке, и объяснил остановку игры полностью – 7 баллов.

10 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Вычислить значение выражения:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+2022\sqrt{1+2023\sqrt{1+2024\cdot 2026}}}}}$$

Решение.

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+2022\sqrt{1+2023\sqrt{1+2024\cdot 2026}}}}}=$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+2022\sqrt{1+2023\sqrt{1+(2025-1)\cdot(2025+1)}}}}}$$

$$=$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+2022\sqrt{1+2023\cdot 2025}}}}=$$

$$=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\dots+2022\cdot 2024}}}=\dots=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot 5}}$$

$$=\sqrt{1+2\cdot 4}=3$$

Ответ: 3.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов. В решении присутствует идея преобразования выражения $n(n+2)=(n+1)^2-1$ -не менее 3 баллов. Вычислительная ошибка – не более 6 баллов.

2. Может ли сумма 2025 подряд идущих натуральных чисел и сумма 2029 следующих натуральных чисел оканчиваться на одинаковую цифру? Если нет, докажите это. Если да, приведите пример.

Решение. Сумма 2025 подряд идущих чисел равна

$$n+(n+1)+(n+2)+\cdots(n+2024)=\frac{2n+2024}{2}\cdot 2025$$
$$=(n+1012)\cdot 2025$$

Сумма 2029 следующих подряд идущих чисел равна
$(n+2025)+(n+2026)+(n+2027)+\cdots(n+2024+2029)=$
$\frac{2n+2\cdot 2024+2030}{2}\cdot 2029=(n+2024+1015)\cdot 2029=(n+3039)\cdot 2029.$

Разница между этими числами равна
$(n+3039)\cdot 2029-(n+1012)\cdot 2025=(4n+1012\cdot 2025)+3039\cdot 2029,$
и это число нечетно (как сумма четного и нечетного чисел). Значит, разница чисел не может быть кратной 10, откуда следует, что последние цифры в двух суммах не могут быть одинаковыми.

Ответ: нет.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов. Получено верное выражение для какой либо суммы: 3 балла. Нет ссылки на арифметическую прогрессию – не снижаем.

3. Робот находится в точке с координатой 0 на числовой прямой. Он делает последовательность из 20 шагов. Каждый шаг он с равной вероятностью сдвигается либо на +1 (вправо), либо на -1 (влево). Какова вероятность того, что после 20 шагов он окажется в точке с координатой 0, но при этом ни разу за всю прогулку не побывает в точке с координатой -1?

Решение.

Всего у робота 2^{20} вариантов путей. Найдем количество вариантов, удовлетворяющих условию. Во-первых, раз робот попал в точку 0, значит он сделал ровно 10 шагов влево и 10 шагов вправо, это можно сделать C_{20}^{10} способами. Теперь найдем число путей, проходящих через точку -1. Заметим, что это количество равно числу путей, заканчивающихся в точке -2, так как позиции «-2» и «0» симметричны относительно «-1». Число путей, заканчивающихся в точке -2 должно состоять из 11 шагов влево и 9 шагов вправо, значит оно равно C_{20}^{9}. Количество путей, попадающих в точку 0 и не проходящих через -1, равно $C_{20}^{10}-C_{20}^{9}$. Искомая вероятность равна:

$$\frac{C_{20}^{10}-C_{20}^{9}}{2^{20}}=\frac{4199}{262144}.$$

Ответ: $\frac{C_{20}^{10}-C_{20}^{9}}{2^{20}}=\frac{4199}{262144}$.

Критерии. Только верный ответ – 1 балл (не суммируется со следующими), найдено общее количество вариантов – 1 балл, обосновано найдено число способов попасть в точку 0, не проходя через -1 – 5 баллов. За ответ, не записанный в числовой виде, баллы не снимать.

4. Изобразите все решения уравнения на плоскости (x,y):

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 32xy + 49 = 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения:
$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 32xy + 49 = (x^2+y^2)^2 + 49 + 2\cdot 7\cdot (x^2+y^2) - -16(x^2+y^2+2xy) = (x^2+y^2+7)^2 - 16(x+y)^2 = \left(x^2+y^2+7-4(x+y)\right)\left(x^2+y^2+7+4(x+y)\right) = (x^2-4x+y^2-4y+7)(x^2+4x+y^2+4y+7) = ((x-2)^2+(y-2)^2-1)((x+2)^2+(y+2)^2-1)$.

Таким образом, искомое множество - объединение двух окружностей радиуса 1 с центрами в точках (2,2) и (-2,-2).

Ответ. Объединение двух окружностей радиуса 1 с центрами в точках (2,2) и (-2,-2).

Критерии. Только верный ответ или верный рисунок – 0 баллов, выделен полный квадрат $(x^2+y^2)^2$ –1 балл, выделен полный квадрат $(x^2+y^2+7)^2$ – 4 балла. Приведены какие-либо другие равносильные записи данного уравнения, не помогающие в разложении на множители – 0 баллов.

5. На столе лежит коробок с N спичками. Два игрока ходят по очереди. За ход можно взять 1, 2 или 4 спички. Игрок, который не может сделать ход (когда спичек не осталось), проигрывает. Для каких значений N у первого игрока есть выигрышная стратегия? Обоснуйте ответ.

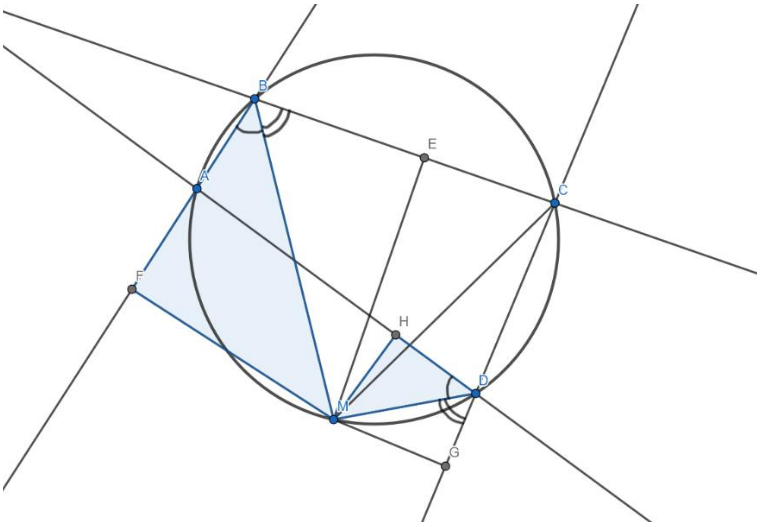
Решение.
Докажем, что выигрывает игрок, назовем его (А), перед которым лежит число спичек, не кратное 3. В этом случае он берет 1 или 2 спички, так, чтобы количество спичек в коробке стало кратным 3 (в частности может остаться 0 спичек). Тогда, как бы не сходил второй игрок, (взяв 1,2 или 4 спички), то после его хода перед игроком (А) всегда будет число спичек, не кратное 3, а значит у игрока (А) будет возможность хода и он не проиграет.
Поэтому, если перед первым игроком не кратное 3 число спичек, он выигрывает при описанной стратегии. Если перед ним кратное 3 число спичек, то после его хода перед вторым игроком будет не кратное 3 число спичек, и выиграет второй игрок.

Ответ: для всех N, не кратных 3.

Критерии. Только верный ответ – 0 баллов, не описана стратегия игрока – не более 4 баллов.

6. Четырехугольник ABCD вписан в окружность ω. Точка M – произвольная точка окружности ω. Из точки M опустили перпендикуляры MF, ME, MG, MH на прямые, содержащие, соответственно, стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника ABCD. Докажите, что MF·MG=ME·MH.

Решение.



1) Заметим, что прямоугольные треугольники MFB и MHD подобны по острому углу, т.к. $\angle FBM = \angle HDM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AM}$, откуда $\frac{MF}{MH} = \frac{MB}{MD}$.

2) Заметим, что прямоугольные треугольники MEB и MGD так же подобны по острому углу, т.к. $\angle EBM = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CM}$, $\angle HDM = 180° - \angle CDM = 180° - (180° - \angle CBM) = \frac{1}{2}\overset{\frown}{CM}$, откуда $\frac{ME}{MG} = \frac{MB}{MD}$.

3) Из п.1 и п.2 $\frac{ME}{MG} = \frac{MF}{MH}$, откуда $ME \cdot MH = MG \cdot MF$. Что и требовалось доказать.

Замечание. При любом положении точки M на окружности при доказательстве подобия используется либо равенство острых углов как вписанных, опирающихся на одну дугу окружности, либо равенство, основанное на свойстве вписанного четырехугольника.

Критерии. Получено и доказано подобие двух ключевых треугольников - не более 3-х баллов.

Не указано, что пара подобий остается справедливой при любом положении точки М – не снижаем.

11 класс

Общие замечания. Если решение участника значительно отличается от приведенного здесь, требуется применить общие критерии проверки (в предисловии к данному сборнику). Если решение в целом верное – не менее 5 баллов, в том числе 5 за существенный недочет и 6 за менее существенный. Если в целом задача не решена – не более 3 баллов. Если к какой-либо задаче приведен неполный перечень критериев по баллам – также используются общие критерии.

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2024}+\sqrt{x+2025}}-1=0.$$

Ответ. $\frac{4\,092\,525}{4}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем каждый член суммы:

$\frac{1}{\sqrt{x+k}+\sqrt{x+k+1}}=\sqrt{x+k+1}-\sqrt{x+k}$ для $k=1,2,\ldots,2024$. Тогда левая часть уравнения примет вид: $\sum_{k=1}^{2024}\left(\sqrt{x+k+1}-\sqrt{x+k}\right)=\sqrt{x+2025}-\sqrt{x+1}$

Следовательно, исходное уравнение равносильно уравнению:

$$\sqrt{x+2025}-\sqrt{x+1}=1$$

Откуда получим $x=\frac{2021\cdot 2025}{4}=\frac{4\,092\,525}{4}$

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Получено промежуточное уравнение – не менее 2 б.

Допущена арифметическая ошибка – не более 5 б.

2. На столе лежит $\boldsymbol{N}$ камней. Два игрока ходят по очереди. За ход можно взять 1, 2 или 4 камня. Игрок, который не может сделать ход (когда камней не осталось), проигрывает. Для каких значений $\boldsymbol{N}$ у первого игрока есть выигрышная стратегия? Обоснуйте ответ.

О т в е т. Для N не кратных 3.

Р е ш е н и е. 1) Пусть $N = 3 \cdot k, k \in \mathbb{N}$. Тогда выиграет второй игрок. В самом деле, если на предыдущем ходе первый игрок взял m -камней, то второй игрок должен взять либо $3 - m$ камней $(m = 1{,}2)$, либо, если это возможно, $6 - m$ камней $(m = 4)$

2) Пусть теперь $N = 3 \cdot k + 1$ или $N = 3 \cdot k + 2$, тогда выиграет первый игрок. В этом случае он на первом ходе должен взять количество камней равное остатку от деления N на 3. А далее придерживаться стратегии для второго игрока из первого пункта.

К р и т е р и и: Приведено полное верное решение – 7 б.

Замечено, что стратегия должна зависеть от остатка от деления N на 3 – не менее 3б.

Задача 3. Математик рассматривает в магазине часов исправно работающие механические секундомеры. Его интересует сумма расстояний от некоторой заданной точки до центров циферблатов секундомеров и сумма расстояний до концов стрелок секундомеров до той же точки. Верно ли, что в какой-то момент времени вторая сумма расстояний окажется больше чем первая? Ответ обоснуйте.

О т в е т. Да, верно.

Р е ш е н и е. Обозначим центры циферблатов секундомеров S_1, S_2,S_3,..., S_m, а заданную точку, от которой отмеряются расстояния, - O.

Рассмотрим момент времени t_1 и обозначим положение стрелки -ого секундомера A_j, а диаметрально противоположную точку относительно центра циферблата S_j через B_j. Поскольку секундомеры исправные и имеют одинаковые угловые скорости, то они достигнут этих точек синхронно (за 30 сек.), в момент времени t_2=$t_1 + 30$.

Заметим, что в силу неравенства треугольника для каждого $j = 1, \dots, m$ справедливы неравенства $2|OS_j| \leq |A_jO| + |B_jO|$.

При этом знак равенства может достигаться только при условии, что каждая тройка точек O, A_j и B_j лежат на одной прямой. Очевидно, что в этом случае найдется t_1 при котором хотя бы одно из этих неравенств будет строгим. С учетом этого замечания, просуммируем все эти неравенства и получим:

$$2\sum_{j=1}^{m}|OS_j| < \sum_{j=1}^{m}〚(|A_jO|〛 + |B_jO|) \qquad (1)$$

Теперь если предположить противное, то тогда для моментов времени t_1 и t_2 выполнены неравенства

$\sum_{j=1}^{m}|OS_j| \geq \sum_{j=1}^{m}|A_jO|$ и $\sum_{j=1}^{m}|OS_j| \geq \sum_{j=1}^{m}|B_jO|$. А это противоречит (1). Следовательно, либо $\sum_{j=1}^{m}|OS_j| < \sum_{j=1}^{m}|A_jO|$ (расстояния измеренные в момент времени t_1) либо $\sum_{j=1}^{m}|OS_j| < \sum_{j=1}^{m}|B_jO|$(расстояния измеренные в момент времени t_2).

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Рассмотрены частные случаи (специальное расположение секундомеров, все секундомеры запущены одновременно и др. варианты) – не более 2 б.

Рассмотрены неравенства вида $2|OS_j| \leq |A_jO| + |B_jO|$ без дальнейших продвижений – 2 б.

Обоснованно получено неравенство $2\sum_{j=1}^{m}|OS_j| < \sum_{j=1}^{m}|A_jO| + |B_jO|$ – не менее 3 б.

При верном решении пропущены отдельные случаи (например случай когда для всех секундомеров $2|OS_j| = |A_jO| + |B_jO|$) – не более 6 б.

Задача 4. При каких значениях $\boldsymbol{\alpha}$ неравенство

$2 - 2\cos\alpha x\cos 3x - \sin^2 3x > 0$ верно для всех $x \in R$.

О т в е т: При всех иррациональных α.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть неравенства: $2 - 2\cos(\alpha x)\cos 3x - \sin^2 3x = 1 + \cos^2 3x - 2\cos(\alpha x)\cos 3x + \cos^2(\alpha x) - \cos^2(\alpha x) = (\cos(\alpha x) - \cos 3x)^2 + \sin^2(\alpha x)$.

Следовательно, $2 - 2\cos\alpha x\cos 3x - \sin^2 3x = (\cos(\alpha x) - \cos 3x)^2 + \sin^2(\alpha x) \geq 0$ при всех вещественных x и α. Исключим те значения α при которых уравнение

$2 - 2\cos\alpha x\cos 3x - \sin^2 3x = 0$ имеет хотя бы одно решение. Очевидно, что рассматриваемое уравнение эквивалентно системе:

$$\begin{cases}\cos 3x - \cos(\alpha x) = 0\\ \sin^2(\alpha x) = 0\end{cases}$$

Пусть $\alpha = 0$, тогда $2 - 2\cos\alpha x \cos 3x - \sin^2 3x = 0$ при $x = 2\pi k/3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть теперь α - произвольное ненулевое рациональное число, представим его в виде несократимой дроби $\alpha = p/q$. Тогда системе уравнений удовлетворяет число $x = 2\pi q$. Отсюда следует, что при любом рациональном $\alpha = p/q$ неравенство

$$2 - 2\cos\alpha x \cos 3x - \sin^2 3x > 0$$

нарушается по крайней мере при $x = 2\pi q$.

Если же α - иррациональное число, то из второго уравнения системы получим $x = \pi k/\alpha$. Но при этом $\cos 3\pi k/\alpha \neq \pm 1$. Таким образом, неравенство верно для всех x только в случае иррациональных α.

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Левая часть преобразована к сумме неотрицательных выражений — 2 б.

Доказано, что при иррациональных α неравенство верно, но нет полного анализа для рациональных α — 5 б.

Проведен полный верный анализ неравенства для рациональных α — не менее 5 б.

Задача 5 $\boldsymbol{DABC}$- треугольная пирамида, у которой ребра $\boldsymbol{DC}$, $\boldsymbol{DB}$ и $\boldsymbol{DA}$ - взаимно-перпендикулярны. $\boldsymbol{M}$ принадлежит плоскости $\boldsymbol{ABC}$ причем расстояние от этой точки до ребра $\boldsymbol{DC}$ равно 10, до ребра $\boldsymbol{DB}$ равно $\boldsymbol{4\sqrt{5}}$ и до ребра $\boldsymbol{DA}$ равна $\boldsymbol{2\sqrt{13}}$. Найдите минимально возможный обьем пирамиды $\boldsymbol{DABC}$.

О т в е т. $V_{ABCD} = 5184$

Р е ш е н и е. Введем декартову систему координат с началом в т. D и осями DX, DY и DZ совпадающими с DA, DB и DC. Обозначим $DA = a$, $DB = b$ и $DC = c$. Для точки $M(x, y, z)$, лежащей в плоскости ABC, запишем уравнение (уравнение плоскости в отрезках)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \qquad (1)$$

Пусть $M_1(0, y, z)$, $M_2(x, 0, z)$ и $M_1(x, y, 0)$ проекции точки M на плоскости CBD , ABD и ACD соответственно. Запишем расстояния от точки M до ребер DA, DB и DC:

$$\begin{cases} y^2 + z^2 = 52, \\ x^2 + z^2 = 80, \\ x^2 + y^2 = 100 \end{cases}$$

Откуда получим $x = 8,\ y = 6,\ z = 4$.

Из неравенства Коши для трёх чисел $\frac{x}{a}, \frac{y}{b}$ и $\frac{z}{c}$, с учетом уравнения (1), получаем оценку

$$\frac{1}{3} = \frac{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}}{3} \geq \sqrt[3]{\frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \cdot \frac{z}{c}} = \sqrt[3]{\frac{xyz}{abc}} = \sqrt[3]{\frac{8 \cdot 6 \cdot 4}{abc}}$$

Следовательно,

$$V_{DACB} = \frac{1}{3} abc \geq 9 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 4$$

Осталось заметить, что эти неравенства обращаются в равенство, когда

$$\frac{8}{a} = \frac{6}{b} = \frac{4}{c} = \frac{1}{3},$$

т. е. при $a = 24$, $b = 18$, $c = 12$.

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Верно найдены координаты т. $M(x, y, z)$ – 3 б.

Получено уравнение для координат точки $M(x, y, z)$ – 2 б.

Верно получена оценка для объёма пирамиды - не менее 5 б.

Задача 6 На плоскости заданы точки A, B, C, D, E и P такие, что:

1) точки A, B, C, D, E лежат на окружности ω, а точка P лежит вне этой окружности;

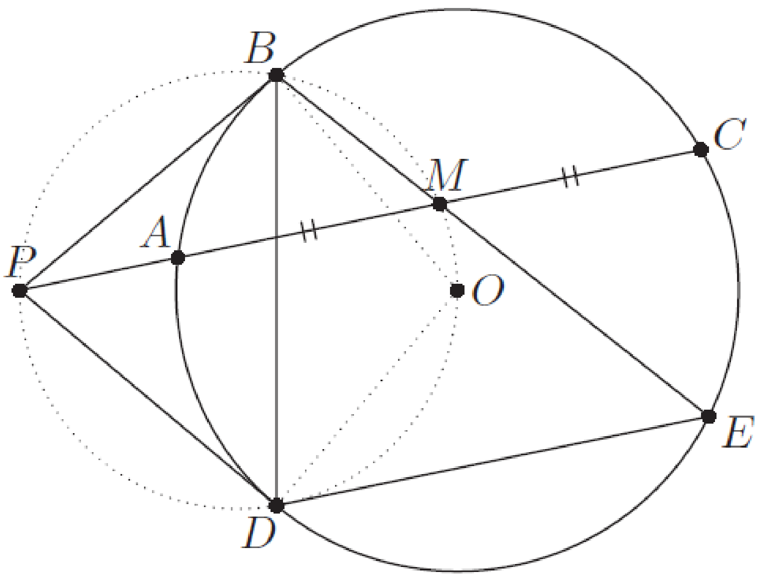
2) прямые PB и PD касаются окружности ω;

3) точки P, A, C лежат на одной прямой и $DE \parallel AC$.

В каком отношении BE делит отрезок AC?

Ответ. В отношении 1:1.

Р е ш е н и е. Пусть M — точка пересечения BE и AC, O-центр окружности ω.



Поскольку прямые PB и PD касаются окружности ω, то $\angle OBP$=$\angle OBP$=90°. Отсюда следует, что через точки P, B, O и D можно провести окружность.

Докажем, что $OM \perp AC$. Теперь покажем, что M также лежит на этой окружности. Действительно, поскольку $DE \parallel AC$, мы имеем $\angle BMP = \angle BMA = \angle BED = \angle PBD = \angle BDP$. Следовательно, $\angle OMP = \angle OBP = 90°$ и $AM = MC$.

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Показано, что через точки P, B, O и D можно провести окружность —не менее 3 б.

Показано, что через точки P, B, O, D можно провести окружность —не менее 4 б.

Р е ш е н и е. 1) Покажем, что $DB = DI = DC$. Можно сослаться на «лемму о трезубце», она же «о куриной лапке», официальное название – лемма Мансиона.

2) Обозначим $x = DB = DI = DC$. В этом случае, поскольку $\angle IDE = \angle ADB = \angle ACB$, мы имеем

$$IE = ID \cdot \sin\angle IDE = x\sin C = x \cdot \frac{c}{2R}.$$

Аналогично, $IF = x \cdot \frac{b}{2R}$. С другой стороны, $AD \cdot a = x \cdot (b + c)$ по теореме Птолемея для четырёхугольника $ABDC$, поэтому $AD = \frac{x(b+c)}{a}$. Собирая всё вместе, мы получаем, что

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{x(b + c)}{a} = IE + IF = \frac{x}{2R}(b + c).$$

Следовательно, мы получаем $a = R$ и тогда $\sin A = \frac{a}{2R} = \frac{1}{2}$. Таким образом: $\angle A = 30^\circ$ или $\angle A = 150^\circ$.

К р и т е р и и:

Приведено полное верное решение – 7 б.

Показано, что $DB = DI = DC$ —3 б.

Для IE и IF получены формулы вида $IE = ID \cdot \sin\angle IDE = x\sin C = x \cdot \frac{c}{2R}$. —4 б.

Получено соотношение вида $AD \cdot a = x \cdot (b + c)$ — 5 б.

Показано, что $R = a$ — 6 б.