7 класс

1. Определите количество семизначных симметричных чисел, записанных только четными цифрами. (Симметричным считаем число, одинаково читаемое и слева направо, и справа налево.)
2. Брокер имеет некоторое количество акций и совершает одну биржевую операцию в секунду: либо продает, либо покупает количество акций, равное номеру секунды, начиная с первой. На какое минимальное число может отличаться от первоначального количество акций у этого брокера после 2025-й секунды торгов?
3. Имеется десять внешне не различимых гирь с массами 1,2,…,10 грамм, и надписи о массах гирь стерты. Также имеются чашечные весы, показывающие разность масс на двух чашах. Верно ли, что сделав всего одно взвешивание, можно однозначно установить массу хотя бы одной гири?
4. Обозначим $[x]$ – *целой частью* числа - наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[1{,}5] = 1$, $[-1{,}5] = -2$. Обозначим $\{x\}$ – *дробной частью* числа – разность между числом и его целой частью, то есть $\{x\} = x - [x]$.
   Решите уравнение $[x] + 5\cdot\{x\} = 20{,}25$.
5. Завхозу спортивного лагеря было нечего делать, и он решил провести учет банок с тушенкой. Завхоз стал раскладывать все имеющиеся банки в две коробки всеми возможными способами и установил, что число банок, лежащих в первой коробке, ровно в восьми случаях составило целое число процентов от общего числа банок. Сколько банок всего могло быть?
6. В шахматном турнире участвовало 20 человек и каждый сыграл с каждым ровно одну партию. Известно, что каждый участник хотя бы один раз сыграл вничью и что если какие-то два человека сыграли вничью, то каждый из остальных восемнадцати выиграл у кого-то из них. Докажите, что все участники выиграли одинаковое количество партий.

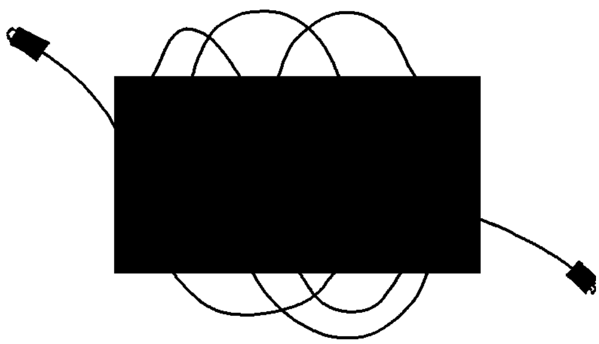
8 класс

1. Три положительных числа таковы, что если из одного вычесть двойку, ко второму прибавить двойку, а третье возвести в квадрат, то получится первоначальный набор трёх чисел. Из каких трёх чисел состоит набор, если их сумма 2025?

2. Лёня придумал новую функцию, которая для заданного натурального числа выдаёт количество всех натуральных чисел, меньших заданного и взаимно простых с ним. Какое значение функция Лёни выдаст для аргумента 935?

3. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты BH_1, CH_2 и медианы BM_1, CM_2. Известно, что угол между прямыми M_1H_2 и M_2H_1 на 60 градусов больше градусной меры угла A. Какова градусная мера угла A?

4. Меланья запутала USB-провод для зарядки, положила поверх спутанного провода телефон, сфотографировала и выложила фото(см. рисунок) в сторис, предложив желающим отгадать, сколько существует вариантов соединения частей провода под телефоном(какие видимые части провода соединены с какими). Итак, сколько вариантов? Ответ обосновать.



5. Какое наибольшее число нечётных цифр может иметь пятизначное число, делящееся нацело на 101? Ответ обосновать.

6. В гардеробе театра в очереди друг за другом стоят 50 мальчиков и 50 девочек в каком-то порядке. Скучающий охранник театра заметил, что в этой очереди есть ровно одна группа из 30 детей, стоящих подряд, в которой мальчиков и девочек поровну. Помогите доказать охраннику, что найдётся группа из 70 стоящих подряд детей, в которой мальчиков и девочек также будет поровну.

9 класс

1. Вычислить $\sqrt{\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}}$, **где** $\boldsymbol{A} = \underbrace{11\dots 1}_{2026\,раз}$, $\boldsymbol{B} = \underbrace{22\dots 2}_{1013\,раз}$

2. Для любых двух действительных чисел a и b определена операция $a \lozenge b$ следующим образом: $a \lozenge b = a + b + k \cdot a \cdot b$, где k — некоторое фиксированное действительное число, не равное нулю. Известно, что:

(1) операция $\lozenge$ является ассоциативной, то есть для любых a, b, c выполняется: $(a \lozenge b) \lozenge c = a \lozenge (b \lozenge c)$,

(2) существует такое число e, что для любого a выполняется: $a \lozenge e = e \lozenge a = a$.

Найдите числа e и k, для которых выполнены свойства (1)-(2)

3. Робот находится в точке с координатой 0 на числовой прямой. Он делает последовательность из 6 шагов. Каждый шаг он с равной вероятностью сдвигается либо на +1 (вправо), либо на -1 (влево). Какова вероятность того, что после 6 шагов он окажется в точке с координатой 0, но при этом ни разу за всю прогулку не побывает в точке с координатой -1?

4. В треугольнике ABC H_1, H_2, H_3 — основания высот, проведенных соответственно из вершин треугольника A, B, C, а M_1, M_2, M_3 — середины соответствующих сторон BC, AC, AB. Докажите, что длина ломаной $M_1H_2M_3H_1M_2H_3M_1$ больше суммы высот треугольника ABC.

5. Докажите, что для корней x_1, x_2 уравнения $x^2 + \sqrt{\frac{2}{3}}px - \frac{3}{4p^2} = 0$ выполняется оценка $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$.

6. Два игрока, Аня и Боря, играют в следующую игру. Перед ними лежит коробок, в котором N спичек. Игроки ходят по очереди, первой ходит Аня. За один ход игрок может взять из кучи любое положительное число спичек, являющееся делителем текущего количества спичек в куче, кроме самого этого числа. (Например, если в куче 12 спичек, то можно взять 1, 2, 3, 4 или 6 спичек. Кто взял последнюю спичку проигрывает. Для N от 100 до 200 найти такие, при которых Аня выигрывает при правильной игре.

10 класс

1. Вычислить значение выражения:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\cdots+2022\sqrt{1+2023\sqrt{1+2024\cdot 2026}}}}}$$

2. Может ли сумма 2025 подряд идущих натуральных чисел и сумма 2029 следующих натуральных чисел оканчиваться на одинаковую цифру? Если нет, докажите это. Если да, приведите пример.

3. Робот находится в точке с координатой 0 на числовой прямой. Он делает последовательность из 20 шагов. Каждый шаг он с равной вероятностью сдвигается либо на +1 (вправо), либо на -1 (влево). Какова вероятность того, что после 20 шагов он окажется в точке с координатой 0, но при этом ни разу за всю прогулку не побывает в точке с координатой -1?

4. Изобразите все решения уравнения на плоскости (x,y):

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 - 32xy + 49 = 0.$$

5. На столе лежит коробок с N спичками. Два игрока ходят по очереди. За ход можно взять 1, 2 или 4 спички. Игрок, который не может сделать ход (когда спичек не осталось), проигрывает. Для каких значений N у первого игрока есть выигрышная стратегия? Обоснуйте ответ.

6. Четырехугольник ABCD вписан в окружность ω. Точка M – произвольная точка окружности ω. Из точки M опустили перпендикуляры MF, ME, MG, MH на прямые, содержащие, соответственно, стороны AB, BC, CD, DA четырехугольника ABCD. Докажите, что MF·MG=ME·MH.

11 класс

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}}+\frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x+3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{x+2024}+\sqrt{x+2025}}-1=0.$$

2. На столе лежит $\boldsymbol{N}$ камней. Два игрока ходят по очереди. За ход можно взять 1, 2 или 4 камня. Игрок, который не может сделать ход (когда камней не осталось), проигрывает. Для каких значений $\boldsymbol{N}$ у первого игрока есть выигрышная стратегия? Обоснуйте ответ.

3. Математик рассматривает в магазине часов исправно работающие механические секундомеры. Его интересует сумма расстояний от некоторой заданной точки до центров циферблатов секундомеров и сумма расстояний до концов стрелок секундомеров до той же точки. Верно ли, что в какой-то момент времени вторая сумма расстояний окажется больше чем первая? Ответ обоснуйте.

4. При каких значениях $\boldsymbol{\alpha}$ неравенство

   $2-2\cos\alpha x\cos 3x-\sin^2 3x>0$ верно для всех $x\in R$?

5. $DABC$- треугольная пирамида, у которой ребра DC, DB и DA -взаимно-перпендикулярны. M принадлежит плоскости ABC причем расстояние от этой точки до ребра DC равно 10, до ребра DB равно $4\sqrt{5}$ и до ребра DA равна $2\sqrt{13}$. Найдите минимально возможный обьем пирамиды $DABC$.

6. На плоскости заданы точки A, B, C, D, E и P такие, что:
   - точки A, B, C, D, E лежат на окружности ω, а точка P лежит вне этой окружности;
   - прямые PB и PD касаются окружности ω;
   - точки P, A, C лежат на одной прямой и $DE \parallel AC$.

   В каком отношении BE делит отрезок AC?