ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

2022-2023 УЧЕБНЫЙ ГОД

РЕСПУБЛИКА БАШКОРТОСТАН

МУНИЦИПАЛЬНЫЙ ЭТАП

Авторы задач и составители:

А.Н.Белогрудов, Н.Ф.Валеев, Р.Н.Гарифуллин, А.Р.Минниахметов, Э.А.Назирова, М.В.Саханевич, А.В.Столяров

Рецензент Э.М.Нусратуллин

УФА - 2022

Методика оценивания выполнения олимпиадных заданий

1. Для единообразия проверки работ Участников в разных муниципальных образованиях в материалы включаются не только ответы и решения заданий, но и критерии оценивания работ. Для повышения качества проверки возможна организация централизованной проверки региональным жюри.

2. Для повышения качества проверки обязательным является требование двух независимых проверок каждого решения разными членами жюри.

3. На математических олимпиадах применяется 7-балльная шкала оценки решений, действующая на всех математических соревнованиях от начального уровня до Международной математической олимпиады. Каждая задача оценивается целым числом баллов от 0 до 7. Итог подводится по сумме баллов, набранных Участником.

Основные принципы оценивания приведены в таблице.

Баллы	**Правильность (ошибочность) решения**
7	Полное верное решение
6-7	Верное решение. Имеются небольшие недочёты, в целом не влияющие на решение
5-6	Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений
4	Верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев
2-3	Доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи
0-1	Рассмотрены отдельные важные случаи при отсутствии решения (или при ошибочном решении)
0	Решение неверное, продвижения отсутствуют
0	Решение отсутствует

При этом также необходимо придерживаться следующих правил:

а) любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снятие баллов за то, что решение слишком длинное, или за то, что решение школьника отличается от приведённого в методических разработках или от других решений, известных жюри; при проверке работы важно вникнуть в логику рассуждений участника, оценивается степень её правильности и полноты;

б) олимпиадная работа не является контрольной работой участника, поэтому любые исправления в работе, в том числе зачёркивание ранее написанного текста, не являются основанием для снятия баллов; недопустимо снятие баллов в работе за неаккуратность записи решений при её выполнении;

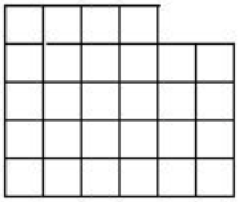
в) баллы не выставляются «за старание участника», в том числе за запись в работе большого по объёму текста, не содержащего продвижений в решении задачи;

г) победителями олимпиады в одной параллели могут стать несколько участников, набравшие наибольшее количество баллов, поэтому не следует в обязательном порядке «разводить по местам» лучших участников олимпиады.

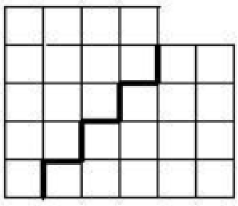
4. В случае возникновения затруднений по оцениванию решений жюри может обратиться в РПМК за дополнительными разъяснениями и консультациями.

5 класс

1. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две одинаковые части.



Решение.



Критерии. Любая верная картинка – 7 баллов.

2. Катя нарисовала на бумаге 6 отрезков и отметила их точки пересечения синим маркером. Оказалось, что в каждой отмеченной точке пересекаются ровно 2 отрезка. Кроме того, на первом отрезке оказалось 3 отмеченные точки, на втором — 4, на третьем, четвёртом и пятом — по 5 отмеченных точек. Сколько отмеченных точек есть на шестом отрезке?

Решение. По условию и третий, и четвёртый, и пятый отрезок должны пересекаться со всеми остальными пятью отрезками. Поэтому первый отрезок должен пересекать только третий, четвёртый и пятый отрезки. Следовательно, второй отрезок пересекает третий, четвёртый, пятый и шестой отрезки. Значит, шестой отрезок пересекает третий, четвёртый, пятый и второй отрезки, т. е. на нём отмечено 4 точки.

Ответ. 4 точки.

Критерии. Только ответ или пример с ответом – 2 балла. Верно указано про 3, 4 и 5 отрезки – 1 балл. Верно указано после этого про первый отрезок – еще 2 балла. Верно указано после этого про второй отрезок – еще 2 балла.

3. Шесть кандидатов в депутаты рассказывали о себе. Через некоторое время один сказал: "До меня соврали один раз". Другой тут же сказал: "А теперь - дважды". "А теперь - трижды", - сказал моментально третий, и так далее до шестого, который сказал: "А теперь соврали 6 раз". Тут модератор прервал дискуссию. Оказалось, что по крайней мере один кандидат правильно посчитал, сколько раз соврали до него. Так сколько же раз всего соврали кандидаты?

Решение. Предположим, что первый кандидат соврал. Это значит, что до его утверждения количество ложных высказываний не равнялось 1. После его высказывания это количество увеличилось на 1, поэтому стало не равным 2. Следовательно, второй кандидат тоже соврал. Продолжая такие же рассуждения, получаем, что все кандидаты соврали, а это противоречит условию задачи. Значит, первый кандидат сказал правду. Тем самым, как до, так и после его высказывания количество ложных утверждений равнялось 1. Поэтому второй кандидат соврал. Далее, рассуждая аналогично получаем, что и все последующие тоже соврали. Итак, соврали все кандидаты, кроме первого, и ещё одна ложь прозвучала до описываемой дискуссии. Поэтому всего кандидаты соврали 6 раз.

Ответ. 6 раз.

Критерии. Доказано, что первый кандидат сказал правду, дальнейших продвижений нет – 3 балла. Если дан ответ 5 при условии того, что забыта ложь, сказанная до фраз кандидатов – 5 баллов.

4. Арина взяла в долг у Людмилы 19 тетрадей, обязуясь вернуть их в течение четырех месяцев. Причем в каждом месяце, начиная со второго, количество возвращаемых тетрадей должно расти и нацело делиться на количество тетрадей, возвращённых в предыдущем месяце. Сколько тетрадей вернёт Арина в последний месяц? Приведите все возможные варианты ответа, обоснуйте.

Решение. Заметим, что если в текущем месяце Арина отдала x тетрадей, то в следующем месяце Арина отдаст хотя бы $2x$ тетрадей. Таким образом, если в первый месяц Арина отдала x тетрадей, то всего она отдаст не менее $x + 2x + 4x + 8x = 15x$ тетрадей. Т.к. $15x \leq 19$, то $x = 1$. Пусть во втором месяце Арина отдала y тетрадей. Тогда всего она отдаст не менее $1 + y + 2y + 4y = 1 + 7y$ тетрадей. $7y + 1 \leq 19$ и $y > 1$, значит, $y = 2$. Если в третьем месяце Арина отдаст не менее 6 тетрадей, то в последнем не меньше 12, но $12 + 6 + 2 + 1 = 21 > 19$. Значит, в третьем месяце Арина отдаст 4 тетради. Тогда в последний месяц Арина отдаст $19 - 1 - 2 - 4 = 12$ тетрадей.

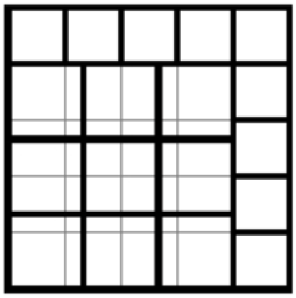
Ответ. 12 тетрадей.

Критерии. Только ответ или пример с ответом – 1 балл. Доказательство, что в первый день Арина отдаст 1 тетрадь, во второй день - 2 тетради, в третий день 4 тетради – по 2 балла за каждое.

5. Паша рисует на доске всевозможные квадраты. Саша утверждает, что он сможет выбрать какой-нибудь квадрат, который можно разрезать на два вида квадратиков, среди которых больших будет столько же, сколько и маленьких. Прав ли Саша? Если да, то приведите пример подходящего разрезания квадрата, а если нет,

то объясните, почему такого квадрата не существует.

Решение. Например,



Ответ. Да.

Критерии. Любая верная картинка – 7 баллов.

6 класс

1. 10 братьев получили в наследство 7 верблюдов. Они решили поделить наследство поровну. Семеро старших взяли себе по верблюду, а троим младшим выделили деньги: каждый из семерых старших братьев заплатил по 15 монет, а младшие поделили эти деньги поровну. Сколько монет стоит один верблюд?

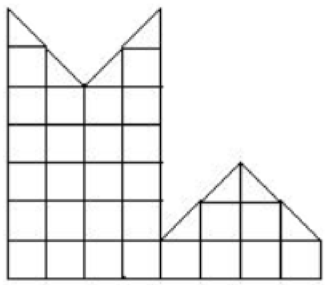
Решение. Если бы верблюдов можно было поделить поровну, то каждому брату досталось бы по 7/10 верблюда. Младшие братья получили в наследство 15*7=105 монет. Каждому из них досталось по 105:3=35 монет, а это и есть стоимость 7/10 верблюда.

Значит, верблюд стоит 35: (7/10)=35:7*10=50 монет.

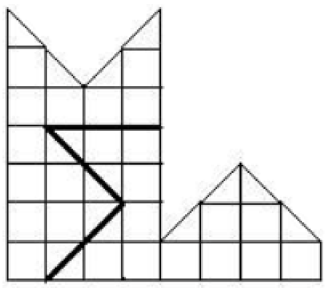
Ответ. 50 монет.

Критерии. Верное решение (может отличаться от написанного выше!) – 7 баллов. Верное решение с вычислительной ошибкой – 5 баллов. Найдено, что каждому младшему досталось по 35 монет, дальнейших продвижений нет – 2 балла. Только ответ – 1 балл.

2. Разрежьте фигуру, изображенную на рисунке, на две одинаковые части.



Решение.



Критерии. Любая верная картинка – 7 баллов.

3. В парламенте Остазии заседают 2023 парламентария, каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Каждый из них сказал следующее:

1-й: Среди нас ровно 1 парламентарий говорит правду.

2-й: Среди нас ровно 2 парламентариев лгут.

3-й: Среди нас ровно 3 парламентариев говорят правду.

. . .

2022-й: Среди нас ровно 2022 лжеца.

2023-й: Среди нас ровно 2023 говорят правду.

Сколько рыцарей могло быть в этом парламенте? Перечислить все варианты и доказать, что других нет.

Решение. Заметим, что первых 2022 парламентариев можно поделить на пары 1-2022, 2-2021 и т.д. по принципу, что в каждой паре будет сказана одна и та же фраза. В итоге их фразы и фразу 2023 парламентария можно переформулировать так: «Среди нас ровно нечётное количество рыцарей (от 1 до 2023)».

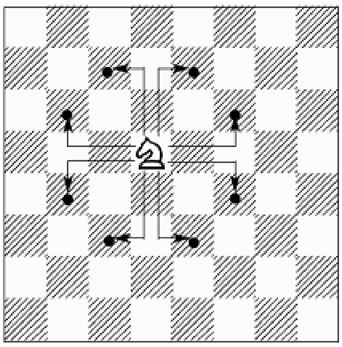
Предположим, что среди них есть хотя бы один рыцарь. Тогда правдой будет, что среди них ровно одно какое-то нечётное количество рыцарей. Но одну и ту же фразу не могли сказать более двух человек, значит, рыцарь один. Фразу про ровно одного рыцаря говорят 1-й и 2022-й, т.е. рыцарей двое должно быть, что не может быть. Тем самым, наше предположение неверно, значит, рыцарей нет.

Ответ. 0.

Критерии. Если замечено, что фразы могут быть переформулированы про только нечётное количество рыцарей – 2 балла. Если доказано, что рыцарей не более двух – 2 балла. Рассмотрены случаи на 2 рыцаря, 1 рыцарь и 0 рыцарей – по 1 баллу за каждый случай.

4. В каждую клеточку доски 8x8 записали натуральное число. Могло ли при этом одновременно оказаться так, что:

- если у клеточек есть общая сторона, то числа в них отличаются на 1;
- если клеточки можно соединить ходом коня (см. рис.), то числа в них отличаются на 3?



Ответ объясните.

Решение. Выберем две клетки, которые можно соединить ходом коня. Обозначим меньшее из чисел в них через X, тогда большее будет равно $X + 3$. Два промежуточных квадратика должны содержать числа $X +1$ и $X + 2$ (см. рисунок).

$X+3$	$X+2$	a
b	$X+1$	
c	X	

Поскольку клетки c и b имеют общие стороны с X и X+3, в них должны содержаться соответственно X+1 и X+2. Рассмотрим клетку a. С одной стороны, она достижима ходом коня из X, поэтому в ней должно быть число X+3 или X-3. С другой стороны, она достижима ходом коня из клетки b, и поэтому в ней должно быть (X+2)+3 = X+5 или (X+2)-3 = X-1. Получено противоречие, значит, такого быть не может.

Ответ. Нет.

Критерии. Верное решение (может отличаться от написанного выше!) – 7 баллов. Любой частный случай – 0 баллов.

5. По кругу написано 2023 числа. Известно, что для любых двух стоящих рядом чисел одно число нацело делится на другое. Докажите, что можно найти пару чисел, которые не стоят рядом, но обладают тем же свойством.

Решение. Сначала рассмотрим случай, когда есть два стоящих рядом равных друг другу числа: $a = b$. Пусть c — число, которое стоит по другую сторону от b. Тогда в паре (b,c) одно число кратно другому, а значит, и в паре (a,c) одно число кратно другому. Задача решена.

Теперь перейдём к случаю, когда все соседние числа не равны друг другу. Рассмотрим три числа, стоящие рядом. Если они стоят в возрастающем порядке $a < b <$ с, то по условию число b кратно a, а число c кратно b. В этом случае c кратно a и мы нашли пару искомых чисел. То же самое верно, если числа идут в убывающем порядке. Осталось рассмотреть случай, когда неравенства по кругу чередуются: $\ldots > a < b > c < d > \ldots$ Но 2023 — число нечётное, поэтому такое чередование по всему кругу невозможно.

Критерии. Рассмотрен случай двух рядом стоящих равных чисел – 2 балла. Рассмотрен случай трёх подряд стоящих по возрастанию или убыванию чисел – 2 балла. Показано, что чередования неравенств по кругу невозможно из-за нечётности количества чисел – 3 балла.

7 класс

1. В одном лицее 76% учеников хотя бы раз не делали домашнюю работу, а $\frac{5}{37}$ иногда забывают вторую обувь. Найти количество учеников лицея, если их больше 1000, но меньше 2000.

   Решение. Т.к. 76% = $\frac{76}{100} = \frac{19}{25}$, а числа 25 и 37 – взаимно простые, то количество учеников кратно 25 · 37, т.е. 925k, где k - натуральное. Поскольку $1000 < 925k < 2000$, то k = 2, а количество учеников 925 · 2 = 1850.

Ответ. 1850

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 1 балл. Нет ссылки на взаимную простоту чисел 25 и 37 – снимаем 1 балл. Вычислительные ошибки – снимаем не менее 2 баллов (зависит от влияния на ход решения).

2. Денис поселил у себя хамелеонов, которые могут окрашиваться только в два цвета: красный и коричневый. Сначала красных хамелеонов у Дениса было в пять раз больше, чем коричневых. После того, как два коричневых хамелеона покраснели, количество красных хамелеонов стало в восемь раз больше, чем коричневых. Найдите, сколько хамелеонов у Дениса.

   Решение. Пусть t коричневых хамелеонов было у Дениса. Тогда красных было *5t*. Из условия задачи получаем уравнение $5t + 2 = 8(t - 2)$. Откуда t = *6*. Тогда всего хамелеонов *6t*, то есть 36.

Ответ. 36

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 1 балл. Верно составлено уравнение, но неверно решено не из-за арифметики – не более 4 баллов. Нет обоснования к составлению уравнения, но из контекста понятно, что автор имел в виду – не снимать.

3. Нечётное шестизначное число назовём «*просто клёвым*», если оно состоит из цифр, являющимися простыми числами, и никакие две одинаковые цифры не стоят рядом. Сколько существует «*просто клёвых*» чисел?

   Решение. Всего простых однозначных чисел четыре – 2, 3, 5, 7. Будем расставлять цифры, начиная с наименьшего разряда. В разряде единиц могут стоять три из них – 3, 5, 7. В разряде десятков тоже три из четырёх (все, кроме той, которую поставили в разряд единиц). В разряде сотен тоже три из четырёх (все, кроме той, которую поставили в разряд десятков). И т.д. В результате получим, что количество «просто клёвых» чисел равно 3^6, т.е. 729.

Ответ. 729.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 1 балл. В разряд единиц включены все 4 числа – 3 балла. Единица отнесена к простым числам и с учётом этого дальнейшее решение верно – 5 баллов.

4. В крайних горизонталях доски 15x15 стоят два ряда фишек: на нижней горизонтали в каждой клетке стоит белая фишка, а на верхней горизонтали в каждой клетке – чёрная. Каждым ходом игроки сдвигают одну из своих фишек (первый игрок белую, второй – чёрную) на любое количество клеток соответвственно вверх или вниз, при этом нельзя ходить на клетку, где находится фишка противоположного цвета и «перескакивать» через неё. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Может ли кто-то из игроков гарантированно выиграть? Ответ обоснуйте.

   Решение. Выигрывает первый игрок. Первым ходом он сдвигает свою фишку (например, самую левую) на максимально возможное количество клеток и про вертикаль с этой фишкой забывает. Оставшуюся часть доски делит на полоски из двух вертикалей. На каждой такой полоске применяет следующую стратегию: если второй игрок на одной из полосок сделал n ходов вперёд, то первый игрок делает n ходов вперёд на другой вертикали этой же полоски. Если же второй игрок на одной из полосок сделал n ходов назад, то первый игрок делает n ходов вперёд на той же вертикали этой же полоски. В результате после хода первого игрока на каждой из полосок будет равное количество клеток между фишками на обеих вертикалях, а после хода второго на одной из полосок – разное. Значит, у первого игрока всегда есть ход в этой стратегии. Т.к. сумма расстояний между белыми фишками и клетками верхней горизонтали уменьшается с каждым ходом первого игрока, то игра когда-нибудь закончится, а поскольку при этой стратегии у первого игрока всегда есть ход, то второй игрок проиграет.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ и (или) описан первый ход – 0 баллов. Присутствует идея разбиения вертикалей на пары и верно описан первый ход, дальнейшего продвижения нет – 1 балл. Верно описана стратегия игры за первого игрока – 3 балла **(а)**. Доказана возможность такой стратегии за первого игрока (т.е. доказано, что после хода второго на какой-либо полоске будет разное число клеток между фишками в вертикалях, т.е. первый может сделать ход по этой стратегии) – 1 балл **(б)**. Доказано, что стратегия выигрывает (т.е. после хода первого вертикалях одной полоски одинаковое число клеток между фишками) – 2 балла **(в)**. Доказано (возможно, неявно), что игра конечная – 1 балл **(г)**. Баллы в пунктах а, б, в, г суммируются.

5. В 3000-м году чемпионат мира по хоккею будет проходить по новым правилам: за победу будут давать 12 очков, за поражение вычитать 5 очков, а за ничью команды очков не получат. Если на этом чемпионате сборная Бразилии сыграет 38 матчей, наберет 60 очков и хотя бы один раз проиграет, то сколько побед она может одержать? Приведите все возможные варианты и обоснуйте, почему других быть не может.

   Решение. Пусть в x матчах Бразилия победит, а в y матчах проиграет. Составим уравнение $12x-5y=60$. Видим, что $12x \vdots 12$ и $60 \vdots 12$. НОД(5, 12)=1, т.е. $y \vdots 12$. Возможно: а) y = 12. Тогда получим уравнение 12x – 60 = 60. Т.е. x = 10. Это возможно. б) y = 24. Получим уравнение: 12x – 120 = 60. Откуда x = 15. Это невозможно, т.к. количество матчей уже превышает 38. в) y = 36. Получим 12x – 180 = 60. Откуда x = 20, что также невозможно. Большие значения x не подходят, т.к. уже будет превышено число сыгранных матчей.

Ответ. 10 побед.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Только верный ответ с проверкой – 1 балл. Верно составлено уравнение, дальнейшего продвижения нет (даже с верным ответом и проверкой) – 2 балла. Составлено уравнение, есть идея делимости, дальнейшего продвижения нет – 3 балла. После составления уравнения есть идея делимости, рассмотрен только первый случай и получен верный ответ – 4 балла. После составления уравнения есть идея делимости, рассмотрены только первый и второй случаи, получен верный ответ – 5 баллов. После рассмотрения второго случая без объяснений написано, что далее количество матчей увеличивается – не снимать. Полный перебор с одной вычислительной ошибкой и верным ответом – 5 баллов. Пропущен один случай в полном переборе – не более 4 баллов. Пропущено более одного случая при полном переборе с верным ответом – 1 балл, с неверным ответом – 0 баллов.

6. В ряд встали 3 мальчика и 20 девочек. Каждый из детей посчитал количество девочек, которые находятся левее него, количество мальчиков, которые находятся правее него, и сложил полученные

результаты. Какое наибольшее количество различных сумм могло получиться у детей? (Приведите пример, как могло получиться такое количество и докажите, что большего количества различных чисел получиться не могло.)

Решение. Рассмотрим, как изменяется число, при переходе слева направо на одного человека. Если рядом стоящие дети разного пола, то число не изменяется. Если переходим от девочки к девочке, то число увеличивается на 1, а если от мальчика к мальчику, то уменьшается на 1. Таким образом, самое маленькое число в ряду могло увеличиться не более, чем на 19, а значит, различных чисел не более 20. Приведём пример на 20 различных чисел: поставим последовательно слева направо сначала всех мальчиков, затем всех девочек. Тогда числа в ряду будут: 2, 1, 0, 0, 1, 2, …, 19, всего 20 различных.

Ответ. 20.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Верный пример с верным ответом – 2 балла **(а)**. Проверка того, что при данной расстановке действительно получаются 20 различных чисел – 1 балл **(б)**. Оценка, что более 20 различных чисел быть не может – 4 балла **(в)**. Баллы за пункты а, б, в суммируются.

8 класс

1. Денис поселил у себя хамелеонов, которые могут окрашиваться только в два цвета: красный и коричневый. Сначала красных хамелеонов у Дениса было в пять раз больше, чем коричневых. После того, как два коричневых хамелеона покраснели, количество красных хамелеонов стало в восемь раз больше, чем коричневых. Найдите, сколько хамелеонов у Дениса.

   Решение. Пусть t коричневых хамелеонов было у Дениса. Тогда красных было $5t$. Из условия задачи получаем уравнение $5t + 2 = 8(t - 2)$. Откуда $t = 6$. Тогда всего хамелеонов $6t$, то есть 36.

Ответ. 36

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 1 балл. Верно составлено уравнение, но неверно решено не из-за арифметики – не более 4 баллов. Нет обоснования к составлению уравнения, но из контекста понятно, что автор имел в виду – не снимать.

2. Про различные положительные числа a и b известно, что
$$a^3 - b^3 = 3(2a^2b - 3ab^2 + b^3).$$
Во сколько раз большее число превосходит меньшее?

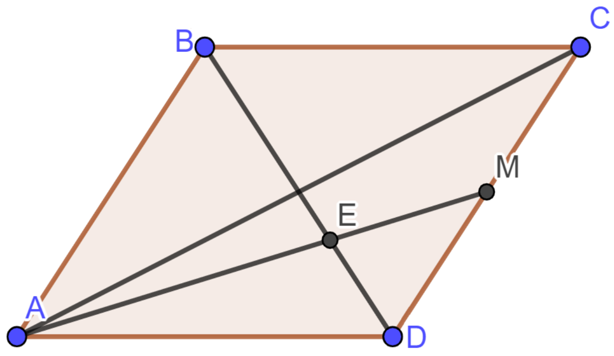
   Решение. Рассмотрим и преобразуем разность:
$$0 = a^3 - b^3 - 3(2a^2b - 3ab^2 + b^3) =$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2) - 3\big(2ab(a-b) - b^2(a-b)\big) =$$
$$(a-b)(a^2 + ab + b^2 - 6ab + 3b^2) =$$
$$(a-b)(a^2 - 5ab + 4b^2) = (a-b)(a-4b)(a-b)$$
   По условию $a \neq b$, тогда получаем $\mathrm{a} = 4\mathrm{b}$, значит большое число в 4 раза больше.

   Ответ: 4.

   Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Ответ с проверкой – 2 балла. Выделен один множитель $a - b$ – не менее 2 баллов, выделено 2 множителя $a - b$ – не менее 4 баллов.

3. В параллелограмме $ABCD$ точка M – середина CD, а отрезки AM и BD пересекаются в точке E. Определите, какую часть площади параллелограмма составляет площадь треугольника DME.

4. Решение. Точка E это точка пересечения медиан ΔACD, поэтому $EM = \frac{1}{3}AM$, следовательно $S_{EMD} = \frac{1}{3}S_{AMD} = \frac{1}{3}\frac{1}{2}S_{ACD} = \frac{1}{6}\frac{1}{2}S_{ABCD} = \frac{1}{12}S_{ABCD}$



Ответ: 1/12.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 0 баллов. Рассмотрены только частные случаи (квадрат и/или прямоугольник) – не более 2 баллов. Доказано первое равенство в цепочке – 3 балла, второе и третье по 1 баллу. Баллы предыдущего предложения суммируются, но не суммируются с частным случаем.

5. Нечётное шестизначное число назовём «*просто клёвым*», если оно состоит из цифр, являющимися простыми числами и никакие две одинаковые цифры не стоят рядом. Сколько существует «*просто клёвых*» чисел?

Решение. Всего простых однозначных чисел четыре – 2, 3, 5, 7. Будем расставлять цифры, начиная с наименьшего разряда. В разряде единиц могут стоять три из них – 3, 5, 7. В разряде десятков тоже три из четырёх (все, кроме той, которую поставили в разряд единиц). В разряде сотен тоже три из четырёх (все, кроме той, которую поставили в разряд десятков). И т.д. В результате получим, что количество «просто клёвых» чисел равно 3^6, т.е. 729.
Ответ. 729.
Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 1 балл. В разряд единиц включены все 4 числа – 3 балла. Единица отнесена к простым числам и с учётом этого дальнейшее решение верно – 5 баллов

6. На доске рядом с числом 2022 написали неизвестное положительное число, меньшее 2022. Затем одно из чисел на доске заменили на их среднее арифметическое. Такую замену провели ещё 9 раз, при этом среднее арифметическое всегда оказывалось целым числом. Найдите меньшее из чисел, написанных на доске изначально.
Решение. Пусть на доске в какой-то момент написаны числа a и b, причем $a > b$, тогда заметим, что после указанной операции разница между числами станет в 2 раза меньше какое бы число мы ни стирали, поскольку

$$a - b = 2\left(a - \frac{a+b}{2}\right) = 2\left(\frac{a+b}{2} - b\right).$$

Тогда после 10 операций имеем $2022 - x = 2^{10} * \Delta$, где x – написанное неизвестное число, а Δ - последняя разница, получаем $x = 2022 - 1024\Delta$, так как x положительно, то единственно возможное натуральное значение для $\Delta -$ это 1, значит $x = 998$.

Ответ. 998.

Рекомендации по проверке. Только верный ответ – 1 балл. Верный ответ при предположении, что каждый раз стирали наибольшое число или наименьшее – не более 2 баллов. Формула (1) или доказанное аналогичное утверждение – не менее 3 баллов. Без обоснования предполагается, что последняя разность равна 1, снимать 2 балла.

7. Авиакомпания «Вперед» обслуживала 50 аэропортов, причем из каждого был как минимум один маршрут. Из-за сокращения числа самолетов авиакомпания вынуждена отменить некоторые маршруты. Во избежание недовольства пассажиров требуется, чтобы из каждого аэропорта осталось хотя бы по одному маршруту. Докажите, что независимо от начальной схемы маршрутов можно сократить их так, что останется не менее 30 аэропортов, из которых есть только один маршрут.

   Решение. Если есть маршрут, соединяющий 2 города, из которых есть более одного маршрута, – то его можно сократить. Будем делать эту процедуру пока возможно, после нее из каждого города останется не более одного маршрута. Из города, где более одного маршрута, все маршруты идут в города с одним маршрутом. Обозначим количество городов с одним маршрутом за x, тогда городов с более чем одним маршрутом $50 - \text{x}$, так как их не менее чем 2 и они ведут в города с не более чем одним маршрутом, то получаем неравество:

   $$2(50 - x) < x$$

   Из которого находим $\text{x} > {}^{100}/_{3}$, следовательно $\text{x} \geq 34$ и тем более x не меньше 30.

   Рекомендации по проверке. Описано когда можно сокращать маршруты – не менее 1 балла, получено неравенство – не менее 4 баллов.

9 класс

1. В интернет-магазине продаются новогодние подарки двух видов. Подарок первого вида содержит игрушку, 3 шоколадных и 15 карамельных конфет и стоит 350 рублей. Подарок второго вида содержит 20 шоколадных и 5 карамельных конфет и стоит 500 рублей. Евгений хочет купить одинаковое количество карамельных и шоколадных конфет, причем именно эти конфеты продаются только в вышеуказанных подарочных наборах. Какую наименьшую ненулевую сумму денег ему придется потратить?

   Ответ: 3750 рублей.

   Решение. Рассмотрим целочисленные значения m и n – количества купленных подарочных наборов конфет соответственно 1-го и 2-го типов. Это количество должно удовлетворять условиям задачи: суммарно в них одинаковое количество карамельных и шоколадных конфет, и это количество наименьшее из всех возможных по условию. Тогда, удовлетворяя условиям задачи, составим уравнение на неизвестные величины:
   $$3m + 20n = 15m + 5n,$$
   решая которое как уравнение в целых числах, получим соотношение
   $$5n = 4m,$$
   откуда получим ненулевое решение $n = 4k, m = 5k, k \in \mathbb{N}$. Наименьшее решение будет при $k = 1$. То есть, $m = 5, n = 4$. Тогда, наименьшая стоимость такого количества подарков будет стоить $350m + 500n = 350 \cdot 5 + 500 \cdot 4 = 3750$ рублей.

   Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Подбор значений количества подарочных наборов без обоснования минимальности – 2 балла. Составлено уравнение на количество наборов и конфет и сделан анализ решений – 3 балла.

2. Существуют ли 2023 целых числа таких, что их произведение равно 2023, а их сумма равна нулю?

   Ответ: Нет, не существует.

   Решение. Докажем, что такое невозможно. Рассмотрим набор из 2023-х целых чисел. Так как количество чисел нечётно, то их сумма является чётным числом тогда и только тогда, когда количество нечётных чисел в сумме является чётным числом. Рассмотрим возможные делители числа 2023 – из них можно составить необходимое произведение. Заметим, что так как число 2023 – нечётное, то все его целые делители являются нечётными числами. Таким образом, в сумме 2023-х слагаемых – все нечётные числа, откуда сама сумма – нечётна. Что является противоречием с условием задачи, так как число ноль – чётное число.
   К сведению, разложение числа $2023 = 7 \cdot 17 \cdot 17$ на множители. Возможны решения, использующие представление целого числа 2023 в виде разложения на множители, среди которых есть целые числа ± 1, ± 7, $\pm 17, \pm 119, \pm 289, \pm 2023$. Заметим, что для доказательства невозможности существования набора чисел необходимо проверить все возможные варианты из набора приведённых. Например, один из них: $7, 17, 17, 1, \dots, 1, -1, \dots, -1$.

Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Если для обоснования невозможности существования набора чисел используются свойства чётности/нечётности суммы чётных и нечётных чисел – 2 балла. Замечено при доказательстве невозможности, что у нечётного числа 2023 есть только нечётные делители – 2 балла. В случае перебора набора чисел из $\pm 1,\ \pm 7,\ \pm 17, \pm 119, \pm 289, \pm 2023$ оценивать полный перебор вариантов полным баллом. В противном случае(перебор не полный) – 2 балла.

3. Известно, что у квадратного трехчлена $x^2 + bx + c$ есть два различных корня. Если сложить коэффициенты b и c и два корня (четыре числа), то получим число -3, а если перемножить эти же четыре числа, то получим число 36. Найдите все такие квадратные трехчлены.

Ответ: $x^2 + 4x - 3$, единственный трёхчлен.

Решение. Рассмотрим корни квадратного трёхчлена $x^2 + bx + c$. Обозначим их как x_1 и x_2. Тогда, по условию задачи имеем пару соотношений:

$$\begin{cases} b + c + x_1 + x_2 = -3, \\ b \cdot c \cdot x_1 \cdot x_2 = 36, \end{cases}$$

где, применяя теорему Виета для приведённого квадратного уравнения ($x_1 + x_2 = -b,\ x_1 \cdot x_2 = c$), получим

$$\begin{cases} b + c - b = -3, \\ b \cdot c \cdot c = 36, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} c = -3, \\ b = 4. \end{cases}$$

Итак, единственным решением задачи является квадратный трёхчлен $x^2 + 4x - 3$. Заметим, что корни такого квадратного трёхчлена являются числами $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{7}$. Возможны решения, в которых корни квадратного трёхчлена выражены через его коэффициенты b и c (или наоборот).

Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Если при составлении соотношений на 4 числа использована теорема Виета или выражение корней квадратного трёхчлена – 2 балла. Полностью обоснованный ответ – полный балл.

4. Имеется клетчатая доска размером 22×23. В каждой клетке доски стоит по одной шашке. За один ход можно выбрать какие-то две шашки, и каждую из них переместить на соседнюю с ней по стороне клетку. Если на какой-то клетке оказалось хотя бы две шашки, то с этой клетки можно снять ровно две из находящихся на ней шашек. Можно ли при помощи нескольких таких ходов снять с доски все шашки?

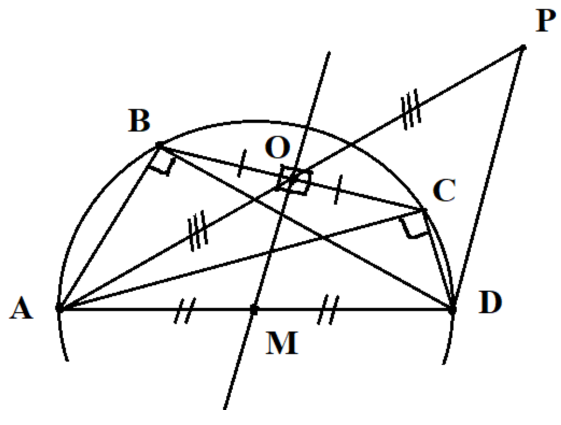
Ответ: Нет, невозможно.

Решение. Докажем методом «от противного», что невозможно снять все шашки с поля. Допустим, что можно снять все шашки с доски после нескольких ходов. Раскрасим все клетки доски в чёрный и белый цвета в шахматном порядке. Допустим, для определенности, верхний левый угол будет чёрным полем. Количество белых и чёрных клеток поровну(по $11 \times 23 = 253$ штук). Будем говорить, что шашка «чёрная», если она находится на чёрной клетке и «белая» – если стоит на белой клетке. Первоначально количество «чёрных» и «белых» шашек по 253 штуки. Заметим теперь, что если мы выбранную шашку перемещаем на соседнюю клетку по правилам задачи, то она обязательно меняет свой цвет на противоположный («белый» на «чёрный» и наоборот). Так как ход игры состоит из перемещения сразу двух шашек на доске, то после хода сохранится нечётность количества «чёрных» и «белых» шашек на доске. Действительно, при любом перемещении двух шашек, например, с двух «одноцветных» клеток – количество шашек одного и другого цвета поменяется на 2 (каких-то станет больше на 2, каких-то меньше на 2), при перемещении с двух разноцветных клеток – количество не изменится. Таким образом, количество «чёрных» и «белых» шашек после любого хода остаётся нечётным числом.

Далее заметим, что если в какой-то клетке доски находятся несколько шашек, то можно снять с этой клетки две шашки (заметим, обе – одинакового цвета). При этом, количество шашек этого же цвета, находящихся на доске, уменьшится на 2, то есть количество оставшихся на доске «чёрных» и «белых» шашек нечётно. Итак, после каждого хода и возможного снятия шашек количество «чёрных» и «белых» шашек на доске нечётно. По предположению, после нескольких ходов на доске не останется ни одной шашки, в нашем случае – ни «чёрных», ни «белых» шашек. То есть, их количество в случае такого окончания игры – чётное. Противоречие. Следовательно, допущение о возможности снять все шашки с доски – неверно.

Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Доказательство на частных примерах – 0 баллов. При решении с помощью шахматной раскраски и инварианта: замечено и доказано, что количество шашек на чёрных и белых клетках доски является нечётным количеством – 3 балла.

5. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD перпендикулярны соответствующим сторонам: $BD \perp AB$ и $AC \perp CD$. Точка O – середина стороны BC. Точка P выбрана так, что точка O является серединой отрезка AP. Докажите, что прямые BC и PD перпендикулярны.



Решение. При рассмотрении конфигурации треугольников ABD и ACD заметим, что оба они как прямоугольные, опираются на одну и ту же сторону – отрезок AD, лежащий против прямых углов $\angle ABD$ и $\angle ACD$. Заметим тогда, что через вершины четырёхугольника $ABCD$ можно провести окружность, так как два прямых (равных) угла опираются на одну сторону(хорду). Тогда, середина стороны AD является центром этой окружности. Обозначим центр окружности точкой M. Рассматривая хорду BC окружности, проведём серединный перпендикуляр к ней. Заметим, что серединный перпендикуляр проходит через точку O. По свойству серединного перпендикуляра к хорде окружности, перпендикуляр проходит через центр окружности точку M. Таким образом, $OM \perp BC$. Рассмотрим теперь треугольник APD. Отрезок OM является средней линией в нём, так как проходит через середины его сторон. Следовательно, $OM \perp PD$. Теперь легко доказать, что $BC \perp PD$, так как BC является секущей при параллельных прямых и перпендикулярна одной из них, а следовательно, перпендикулярна и второй.

Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Доказательство на частных случаях – 0 баллов. Доказано, что отрезок, соединяющий середины сторон AD и BC четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярен стороне BC – 2 балла. Доказано, что четырёхугольник $ABCD$ – вписанный в окружность – 1 балл.

6. Студия школьного танца подсчитала, что выступала в этом году с танцем "Хоровод" уже 40 раз, причем в каждом выступлении участвовало ровно 10 человек и любые два танцора выступали вместе не более одного раза. Докажите, что в студии обучаются не менее 60 танцоров.

Решение. <u>Первое решение.</u> По условию задачи, любые два танцора могли встретиться не более чем на одном выступлении. Будем считать двух таких танцоров парой. Рассмотрим любое выступление: из 10 участников выступления можно образовать не более $\frac{10\cdot 9}{2} = 45$ пар (количество «рукопожатий», $C_{10}^2 = 45$). Так как всего выступлений было 40, то из всех их участников можно образовать не менее $45 \cdot 40 = 1800$ пар. Рассмотрим коллектив из 60 танцоров. Из 60 человек можно образовать не более $\frac{60\cdot 59}{2} = 30 \cdot 59 = 1770$ пар, что меньше, чем 1800. Таким образом, в коллективе не менее 60 танцоров.

<u>Второе решение.</u> Методом «от противного». Допустим, коллектив студии состоит из N танцоров, где $N < 60$. Тогда, по принципу Дирихле для среднего арифметического количества участия танцоров в выступлениях, имеем $\frac{10\cdot 40}{N} = \frac{400}{N} > \frac{400}{60} > 6$, а значит, найдется хотя бы один танцор, который участвовал не менее, чем в семи выступлениях. Тогда, по условию задачи, в этих выступлениях он встречался со всеми их участниками ровно один раз, то есть не менее, чем с $7 \cdot 9 = 63$ разными танцорами. Противоречие, так всего их было не более 60.

Замечания к оцениванию. Ответ без обоснования – 0 баллов. Доказательство на частных случаях – 0 баллов.

10 класс

1. В равностороннем треугольнике на каждой стороне отметили по 3 точки так, что они делят сторону на 4 равных отрезка. Эти точки и вершины треугольника покрасили. Сколько существует равнобедренных треугольников с вершинами в покрашенных точках?

Ответ. 20

Решение. Обозначим вершины треугольника через A, B, C. Пусть на стороне AB взяты точки M,N (M ближе к A), на стороне AC - P,Q (P ближе к A) и на стороне BC точки K и L(K ближе к B). Тогда возможны следующие варианты для равнобедренных треугольников с вершиной в точке A: ABC, AKL, APM, AQN, с вершиной в точке B: BNK, BPQ, BML, с вершиной в точке C: CQL, CPK, CMN. Еще 8 вариантов получаются без использования вершин исходного треугольника: MQK, PLM и 6 треугольников, две стороны которых равны по 1/3 стороны исходного: MNK и т.п.. Итого всего 20 вариантов.

Критерии. Найдены все варианты - 7 баллов. Найдено число вариантов одного типа - 1 балл, двух типов – 3 балла.

2. *Докажите, что в любом прямоугольном треугольнике длины катетов a и b и гипотенузы c удовлетворяют неравенству* $a^4 + b^4 < c^4$.

Решение. Запишем неравенство в виде: $\left(\frac{a}{c}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 < 1$

Для сторон прямоугольного треугольника верно: $\left(\frac{a}{c}\right)^2 < 1, \left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1, \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$. Умножим обе части первого неравенства на выражение $\left(\frac{a}{c}\right)^2$, а обе части второго неравенства на выражение $\left(\frac{b}{c}\right)^2$. Тогда, складывая полученные неравенства, получаем $\left(\frac{a}{c}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 < \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, что и требовалось доказать.

Критерии. Неравенство верно доказано, при этом отмечено, что $\left(\frac{a}{c}\right)^2 < 1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1$, использована теорема Пифагора. Возможна тригонометрическая интерпретация данного неравенства и соответствующее решение 7 баллов.

Замечено, что $\left(\frac{a}{c}\right)^2 < 1$, $\left(\frac{b}{c}\right)^2 < 1$, записана теорема Пифагора в виде $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, но не сделан переход $\left(\frac{a}{c}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 < \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2$ - 2 балла.

3. Из множества натуральных чисел образовали следующую последовательность: 1, 2+3, 4+5+6, 7+8+9+10 и т.д., где в каждой последующей сумме на одно слагаемое больше. Чему равен 2023 член последовательности?

Ответ: $\frac{2023*(2023^2+1)}{2}$ =4 139 594 095.

Решение. Пусть n-я группа начинается с числа k. Тогда эти числа:

k. k+1, ...k+(n-1) - всего n чисел. Их сумма является суммой арифметической прогрессии с первым членом, равным k, разностью 1 и может быть вычислена по формуле:

$$S_n = \frac{k + (k + n - 1)}{2} \cdot n = \frac{2k + n - 1}{2} \cdot n$$

Заметим, что числу k предшествует число *k-1*, которое может быть подсчитано как количество всех чисел в группах с *1*-й по *(n-1)*-ю. Так как по условию в первой группе 1 число, во второй 2 числа, и так далее, то всего чисел в первых *(n-1)* группах будет: $\frac{1+(n-1)}{2} * (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = k - 1$

Следовательно, искомая формула имеет вид:

$$S_n = \frac{2k+n-1}{2} * n = \frac{2\left(1+\frac{n(n-1)}{2}\right)+n-1}{2} * n = \frac{n(n^2+1)}{2},\ \ S_{2023} = \frac{2023\cdot(2023^2+1)}{2}$$ (далее вычислять не обязательно!)

Критерии. Обоснованно получен верный ответ - 7 баллов.

1 вычислительная ошибка - -минус 1 балл. Формулы для арифметической прогрессии использованы без упоминания арифметической прогрессии - оценка не снижается. Получена формула для S_n либо посчитано число k (либо k-1) - 2 балла. Разбор частных случаев - 0 баллов.

4. *В треугольнике ABC синус угла A равен 3/5. На стороне AC взяли точку M так, что CM=15, на стороне AB взяли точку N так, что BN=7, AN=AM, T - середина NC, P - середина B. Найдите длину отрезка PT.*

Ответ. $\sqrt{26{,}5}$**,** $\sqrt{110{,}5}$

Решение. Пусть длина AN=AM=x**.** Введем систему из двух единичных векторов: пусть вектор **b** коллинеарен вектору AB, а вектор **c** коллинеарен вектору AC**.** Тогда верны векторные соотношения:

$$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AP},\ \ \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\right),\ \overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN}\right)$$

$$\overrightarrow{AB} = (x+7)b,\ \ \overrightarrow{AC} = (x+15)c,\qquad \overrightarrow{AM} = x\vec{c},\qquad \overrightarrow{AN} = x\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) = \frac{1}{2}(15\,\vec{c} - 7\,\vec{b})$$

Вычисляя скалярный квадрат вектора $\overrightarrow{PT}$, и учитывая, что косинус угла A может быть равен равен ⅘ для острого угла и -⅘ для тупого, получим:

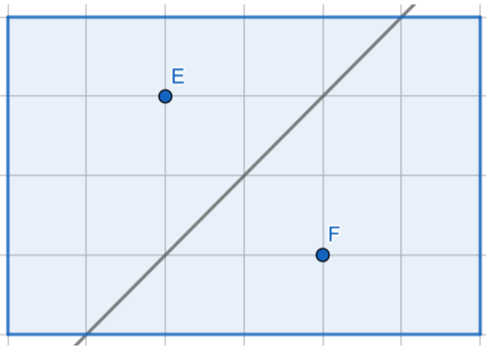
$\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{PT} = \frac{1}{4}\left(49\,\vec{b}\cdot\vec{b} + 225\,\vec{c}\cdot\vec{c} - 210\vec{b}\cdot\vec{c}\right) = 26{,}5.$

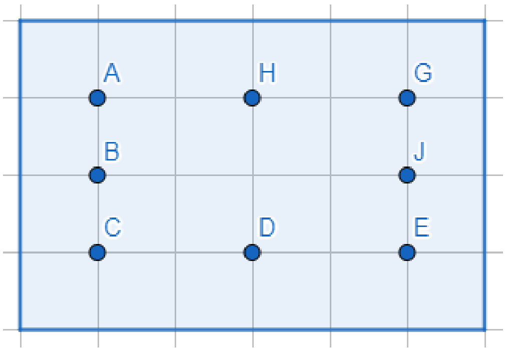
$\overrightarrow{PT} * \overrightarrow{PT} = \frac{1}{4}\left(49\,\vec{b}\cdot\vec{b} + 225\,\vec{c}\cdot\vec{c} - 210\vec{b}\cdot\vec{c}\right) = 110{,}5.$

Критерии. Обоснованно получен верный ответ для обоих случаев - 7 баллов. Решение может быть планиметрическим и не опираться на векторный метод. Разобран 1 случай - 3 балла. Арифметическая ошибка - минус 1 балл.

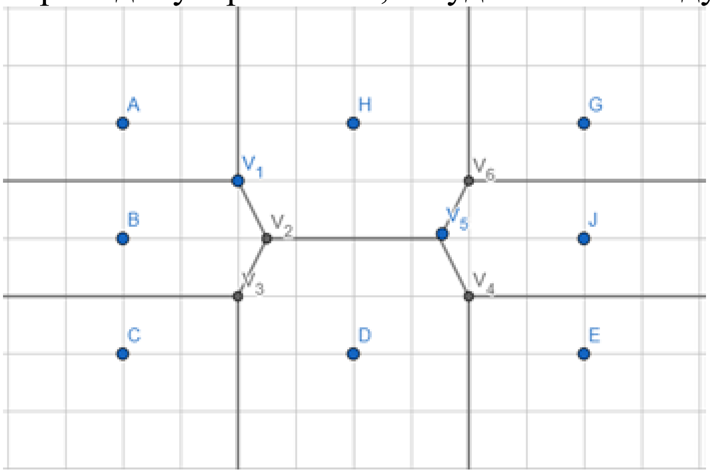
5. Иванов и Сидоров, перспективные айти-специалисты из города Нью Васюки, решили разработать приложение “Дудл-карты” своего города для удобной навигации между восемью пунктами выдачи товаров маркетплейса «Ксенон». Карта города Нью-Васюки представляет собой прямоугольник со сторонами 4 и 6 км. Было решено разбить карту города на многоугольники так, чтобы в каждой точке многоугольника, содержащем какой-то пункт «Ксенона»,

этот пункт был бы ближайшим к этой точке. Если бы в городе было всего 2 пункта, то разбиение карты выглядело бы как на рис.1. Пункты Ксенона в Нью Васюках расположены так, как изображено на рис.2, а именно в вершинах и серединах сторон прямоугольника со сторонами 2км и 4 км.





Решение. Нужное разбиение получается при пересечении серединных перпендикуляров точек, и будет иметь следующий вид:



Критерии. Получено верное разбиение на основании построения серединных перпендикуляров - 7 балл. Построена картинка, но идея построения не указана, нет упоминания серединного перпендикуляра в какой-либо форме - 3 балла. Искажения чертежа при сохранении его структуры, отсутствие перпендикулярности и симметрии на оценку не влияют! Любые отличные от приведенной конструкции разбиения - 0 баллов. Если на приведенной схеме какие-то из точек V_k совпадают, он не может считаться верным!

6. *Найдите хотя бы одно решение уравнения*

$$567x^3 + 171x^2 + 15x - 777\ldots7555\ldots5333\ldots3 = 0,$$

свободный член которого содержит 2023 семерки, 2023 пятерки и 2023 тройки.

Ответ. $\underbrace{111\ldots1}_{2023}$.

Решение. Обозначим число, десятичная запись которого состоит из 2023 единички через x и отметим следующее свойство данного числа:

$$\underbrace{111\ldots1}_{2023} = x, \quad 9x + 1 = 10^{2023},$$

Представим число $777\ldots7555\ldots5333\ldots3$ в виде:

$$777\ldots7555\ldots5333\ldots3 = 3x + 5x * 10^{2023} + 7x * 10^{2*2023} =$$

$$= 3x + 5x * (9x + 1) + 7x * (9x + 1)^2 = 567x^3 + 171x^2 + 15x$$

Следовательно, число х является корнем исходного уравнения.

Критерии. Обоснованно получен верный ответ - 7 баллов. Возможно решение, основанное на исследовании аналогичного уравнения со свободным коэффициентом меньшей разрядности, например такого

$567x^3 + 171x^2 + 15x - 775533 = 0$ и затем обобщении данного случая. Если из наблюдения, что x=11 является решением данного уравнения без каких-либо дополнительных рассуждений сделан вывод о решении исходного уравнения - 3 балла. Получено выражение $9x + 1 = 10^{2023}$ либо его аналог , но решение не закончено, ответ не получен - 2 балла.

Приведены попытки изучения структуры свободного коэффициента, приведено какое-то представление данного числа с использованием числа 111…1 (2023 единицы), решение не закончено, ответ не получен - 1 балл.

11 класс

1. Найдите все представления числа 2022 в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел.

   Решение. Пусть a - первое число искомой последовательности, тогда
   $a + (a + 1) + \cdots + (a + p - 1) = 2022$ и $pa + \frac{p(p-1)}{2} = \frac{p(2a+p-1)}{2} = 2022.$
   Заметим, что $2022 = 2 \cdot 3 \cdot 337$, следовательно $p(2a - 1 + p) = 2^2 \cdot 3 \cdot 337.$
   Поскольку $p + 2a - 1 > p$ при натуральных a, то $p < 337$ и $p = 2,3,4,6$ или 12.
   Далее переберем возможные значения p и находим соответствующие значения a:
   если $p = 2$, то $2a - 1 + 2 = 2 \cdot 3 \cdot 337$ и решений нет;
   если $p = 3$, то $2a - 1 + 3 = 2^2 \cdot 337$ и $a = 673$;
   если $p = 4$, то $2a - 1 + 4 = 3 \cdot 337$ и $a = 504$;
   если $p = 6$, то $2a - 1 + 6 = 2 \cdot 337$ и решений нет;
   если $p = 12$, то $2a - 1 + 12 = 337$ и $a = 163$.
   Ответ. Возможны 3 представления: 673+674+675; 504+505+506+507; 163+164+…+174.

Рекомендации к оцениванию решений. Если выписаны уравнения в виде арифметической прогрессии и далее задача сведена к решению уравнения вида $p(2a - 1 + p) = 2022$ - 2 балла.

Если задача верно сведена к решению $p(2a - 1 + p) = 2^2 \cdot 3 \cdot 337$ и показано, что $p = 2,3,4,6$ или 12 – не менее 4 балла.

2. Решите уравнение $8\sin(x) + 12sin^3(x) + 2022\,sin^5(x) = 8\cos(2x) + 12\cos^3(2x) + 2022\cos^5(2x)$.

   Решение. Введем в рассмотрение функцию $f(t) = 8t + 12t^3 + 2022t^5$ и тогда исходное уравнение можно представить в виде $f(\sin(x)) = f(\cos(2x))$.
   Заметим, что введенная функция $f(t)$ - монотонно возрастающая (как сумма трех монотонно возрастающих функций). Также монотонность функции $f(t)$ легко проверяется с помощью исследования производной этой функции.
   Поскольку $f(t)$ - монотонная, то уравнение $f(\sin(x)) = f(\cos(2x))$ равносильно уравнению
   $$\sin(x) = \cos(2x).$$
   Из последнего уравнения получим $2\,sin^2(x) + sin(x) - 1 = 0$,
   откуда $sin(x) = -1$ или $\sin(\mathrm{x}) = \frac{1}{2}$.
   Таким образом, $\mathrm{x} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \mathrm{x} = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z.$

   Рекомендации к оцениванию решений.
   Если доказано, что исходное уравнение равносильно уравнению $\sin(x) = \cos(2x)$- не менее 4 балла.
   Если верно найдены только решения уравнения $\sin(x) = \cos(2x)$, но не доказано, что других решений нет -2 балла.

3. Докажите, что $3(ab + bc + ca) \leq (a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$, где a, b и c - стороны треугольника. В каких случаях достигается равенство?

Решение. Докажем левое из двойного неравенства.

Запишем для произвольных a, b и c известные неравенства:

$2ab \le a^2 + b^2$, $2ac \le a^2 + c^2$ и $2bc \le c^2 + b^2$.

Сложив правые и левые части этих неравенств получим

$$2(ab + bc + ca) \le 2(a^2 + b^2 + c^2) \text{ или } ab + bc + ca \le a^2 + b^2 + c^2.$$

Прибавим к обеим частям последнего неравенства $2ab + 2bc + 2ca$ и воспользуемся формулой квадрата суммы для трех слагаемых, тогда

$$3(ab + bc + ca) \le (a + b + c)^2.$$

Легко проверить, что для сторон равностороннего треугольника, $a = b = c$

Достигается равенство $3(ab + bc + ca) = (a + b + c)^2$.

Докажем вторую часть неравенства

По условию задачи a, b и c - стороны треугольника, следовательно $|a - b| < c$, $|a - c| < b$ и $|c - b| < a$. Возводя обе части этих неравенств в квадрат получим:

$$a^2 - 2ab + b^2 < c^2$$
$$a^2 - 2ac + c^2 < b^2$$
$$c^2 - 2cb + b^2 < a^2$$

Сложив все три неравенства $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2ac - 2cb < a^2 + b^2 + c^2$ или $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2cb < 0$. Далее $a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2cb + 4(ab + bc + ca) < 4(ab + bc + ca)$ и тогда

$$(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca).$$

Заметим, что для «вырожденных» треугольников при $a + b = c$ неравенство $(a + b + c)^2 < 4(ab + bc + ca)$ превращается в точное равенство.

Рекомендации к оцениванию решений.
Приведено только доказательство точности оценок -1 б.
За верное доказательство только одного неравенства – не более 3 баллов.

4. В 1011 открытых сундучках лежат 2022 монет. Вася и Петя по очереди берут по одной монете, первой выбирает Вася. Докажите, что Петя может выбирать монеты так, чтобы две последние монеты оказались из одного сундучка.

Решение. После выбора Васи, Петя может взять свою первую монету так, чтобы после этого хотя бы один сундучок опустел. В самом деле, после первого хода Васи осталось $2022 - 1$ монета в 1011 сундучках, и следовательно, в каком-то из сундучков осталось не более одной монеты. Если в этом сундуке одна монета, то Петя возьмет его. Если же в этом сундуке нет монет, то Петя может взять монету из любого другого сундука.

Итак, после того как Петя берет первую монету, один сундучок опустеет и остаётся 2020 монет в 1010 сундучках. Если Петя будет и дальше действовать таким же образом, то после того, как он возьмёт вторую монету, опустеют два сундучка, и так и далее..., после того, как Петя возьмёт 1010-ю монету, опустеют все сундучки, за исключением одного. Это и означает, что две оставшиеся монеты лежат в одном сундучке.

Рекомендации к оцениванию решений.

Верно описан первый ход Пети – не менее 3 баллов.

В случае решения задачи методом мат. индукции описан шаг индукции- не менее 3 баллов.

5. В треугольнике ABC синус угла A равен $\frac{\sqrt{3}}{2}$. На стороне AC взяли точку M так, что CM = b, на стороне AB взяли точку N так, что BN = a, T - середина NC, P - середина BM. Найдите PT.

Решение. 1 способ. Поскольку нам известны длины векторов $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC}$ и угол между ними, то, очевидно, необходимо выразить вектор $\overrightarrow{PT}$ через векторы $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{NC}$. Это можно сделать по-разному. Покажем один из возможных способов.

Заметим, что $\overrightarrow{AP} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AM})$ и $\overrightarrow{AT} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AC})$. Поскольку $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$-$\overrightarrow{MC}$ и

$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$-$\overrightarrow{NB}$, то $\overrightarrow{AP} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{MC})$ и $\overrightarrow{AT} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{AC})$. Теперь

$\overrightarrow{PT} = \overrightarrow{AT} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{NB})$. Осталось найти длину вектора $\overrightarrow{PT}$

$$|PT|^2 = \left|\frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{NC})\right|^2 = \frac{1}{4}(MC^2 + NC^2 - 2 \cdot MC \cdot NC \cdot \cos(A))=$$

$$= \frac{1}{4}\left(b^2 + a^2 \pm 2 \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 \pm ba).$$

В последней формуле берется знак «плюс» в случае когда угол A равен 120°, и «минус», когда угол A равен 60°.

Ответ. $\boldsymbol{PT = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2 \pm ba}}$**.**

2 способ. Пусть K –середина BC. Тогда PK и TK –средние линии треугольников MBC и NBC соответственно. Из свойств средних линий треугольника следует, что

$TK \parallel AB$, $PK \parallel AC$ и $\angle PKT = \angle A$, а также $PK = \frac{b}{2}$, $TK = \frac{a}{2}$. Теперь по теореме косинусов для треугольника PKT получим :

$$PT^2 = PK^2 + TK^2 - 2PK \cdot TK \cdot \cos(A) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(b^2 + a^2 \pm 2 \cdot b \cdot a \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}(b^2 + a^2 \pm ba).$$

Ответ. $\boldsymbol{PT = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + a^2 \pm ba}}$

Рекомендации к оцениванию решений. Верно найдено представление вида $\overrightarrow{PT} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{NC})$ или аналог для решения 2 – 3 балла. Верно разобран только один случай из двух – 4 балла.

6. На гранях BCD, ACD, ABD и ABC тетраэдра ABCD отмечены точки A_1, B_1, C_1 и D_1 соответственно. Известно, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 пересекаются в точке P, причем $\frac{AP}{A_1P} = \frac{BP}{B_1P} = \frac{CP}{C_1P} = \frac{DP}{D_1P} = r$. Найдите все возможные значения r.

Решение. Обозначим V объем* тетраэдра ABCD. Введем в рассмотрение разбиение исходного тетраэдра ABCD на тетраэдры PBCD, PACD, PABD и PABC. Тогда для объемов указанных тетраэдров справедливо:

$$V = V_{\text{PBCD}} + V_{\text{PACD}} + V_{\text{PABD}} + V_{\text{PABC}}.$$

Заметим, если H – высота тетраэдра ABCD, опущенная из вершины A на основание BCD, а h - высота тетраэдра PBCD, опущенная из вершины P на основание BCD, то $\frac{H}{h} = \frac{AA_1}{A_1P}$. В силу этого замечания и условия $r = \frac{AP}{A_1P} = \frac{BP}{B_1P} = \frac{CP}{C_1P} = \frac{DP}{D_1P}$ имеем

$$\frac{V}{V_{\text{PBCD}}} = \frac{\text{A}A_1}{A_1P} = \frac{AP+A_1P}{A_1P} = 1 + \frac{AP}{A_1P} = r + 1.$$

Аналогичные соотношения верны и для других тетраэдров так, что

$$\frac{V}{V_{\text{PBCD}}} = \frac{V}{V_{\text{PACD}}} = \frac{V}{V_{\text{PABD}}} = \frac{V}{V_{\text{PABC}}} = r + 1 \text{ или}$$

$$V = (r + 1)V_{\text{PBCD}} = (r + 1)V_{\text{PACD}} = (r + 1)V_{\text{PABD}} = (r + 1)V_{\text{PABC}}.$$

Тогда

$$r + 1 = \frac{(r + 1)V_{\text{PBCD}} + (r + 1)V_{\text{PACD}} + (r + 1)V_{\text{PABD}} + (r + 1)V_{\text{PABC}}}{V_{\text{PBCD}} + V_{\text{PACD}} + V_{\text{PABD}} + V_{\text{PABC}}}$$

или

$$r + 1 = \frac{4V}{V_{\text{PBCD}} + V_{\text{PACD}} + V_{\text{PABD}} + V_{\text{PABC}}} = \frac{4V}{V} = 4$$

Таким образом, $r = 3$.

**Отметим, что для решения этой задачи вовсе не обязательно знать формулу для объема тетраэдра. Достаточно ввести условную величину V = S h, и воспользоваться ее аддитивностью (известный факт из курса математики и физики).*

Рекомендации к оцениванию решений.

Изложено верное решение для частного случая – 2 балла.

Представлено разбиение исходного тетраэдра ABCD на тетраэдры PBCD, PACD, PABD и PABC и получены соотношения вида $\frac{V}{V_{\text{PBCD}}} = \frac{\text{A}A_1}{A_1P} = \frac{AP+A_1P}{A_1P} = 1 + \frac{AP}{A_1P} = r + 1$- не менее 3 баллов.

Отметим, что задачу можно решить векторным методом.